Chapitre 3

Limite et continuité d'une fonction

I Exercices

Limite en $+\infty$ et en $+\infty$

3.1

Compléter ci-dessous, sans justifier.

1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \ldots\ldots$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \ldots\ldots$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = \ldots\ldots$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots$

2. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = \ldots\ldots$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = \ldots\ldots$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots$

3.2

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, calculer chaque fois sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.

1. a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 3$ **b)** $f(x) = 2 - 9x^3$ **c)** $f(x) = x^2 + 8\sqrt{x}$ **d)** $f(x) = 3x^2 - 5x^3$

2. a) $f(x) = \sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x} - 4\right)$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 3}$

3.3

D'après les tableaux de valeurs des fonctions f, g, h, k ci-dessous, quelles sont apparemment : les limites de $f(x)$, de $g(x)$, de $h(x)$, de $k(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

x	$f(x)$
10	125
1000	1002995
100000	10000299995
10000000	100000029999995

x	$g(x)$
10	3,312500
1000	4,973161
100000	4,999730
10000000	4,999997

x	$h(x)$
10	$-20,750000$
1000	$-8,051308$
100000	$-8,000510$
10000000	$-8,000005$

x	$k(x)$
10	$-33,16625$
100000	$-1000,49988$
1000000000	$-100000,00500$
10000000000000	$-10000000,00005$

3.4

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer la limite ℓ de f en $+\infty$ (c'est à dire lorsque x tend vers $+\infty$).

2. Tracer sur l'écran de la calculatrice
- la droite (d) d'équation $y = \ell$;
- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de cette fonction.

3. Que constate-t-on pour cette droite et cette courbe ?

On dit que la droite (d) d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
Dans le paragraphe 3.1.b du cours, voir *Interprétation graphique*.

3.5

Dans l'exercice 3.2, dans quels cas a-t-on eu des asymptotes horizontale en $+\infty$?
Dans ces cas là, indiquer chaque fois le numéro de question et l'équation $y = \ell$.

Remarque : Jusqu'ici nous avons étudié des limites de fonctions lorsque x vers $+\infty$, ce qui fait que nous avons pu réutiliser les limites de suites, en effet, par exemple, les deux limites suivantes sont égales : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} + 3\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + 3\right)$.
Nous allons maintenant étudier des limites de fonctions lorsque x vers $-\infty$, ce qui ne se produit pas pour des suites, puisque n est un entier naturel et ne peut donc pas tendre vers $-\infty$.

3.6

Compléter ci-dessous, sans justifier, mais, si c'est nécessaire, on pourra vérifier à la calculatrice avec la commande `table` ou `graphe`.

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \ldots\ldots$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots\ldots$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \ldots\ldots$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = \ldots\ldots$

2. Pour un entier naturel n non nul, que peut-on donc dire de $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$?

3. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \ldots$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \ldots$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^3}\right) = \ldots$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^4}\right) = \ldots$

4. Pour un entier naturel n non nul, que peut-on donc dire de $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right)$?

5. Dans les questions ci-dessus les limites de $\sqrt{x}$ et de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers $-\infty$ ne sont pas demandées. Pourquoi ?

3.7

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, calculer chaque fois sa limite lorsque x tend vers $-\infty$.

1. a) $f(x) = 6 + \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = 3 + x^3$ c) $f(x) = 8x^2$ d) $f(x) = 7 + \dfrac{2}{x+1}$

2. a) $f(x) = x^3 - x^2$ b) $f(x) = 7x - 4x^2$ c) $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+2}$

3.8

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, calculer chaque fois ses limites lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

1. $f(x) = -5x^3$ 2. $f(x) = 7x^2$ 3. $f(x) = 9 - \dfrac{1}{x}$ 4. $f(x) = x^2 + x^3$ 5. $f(x) = \dfrac{5x+3}{x+1}$

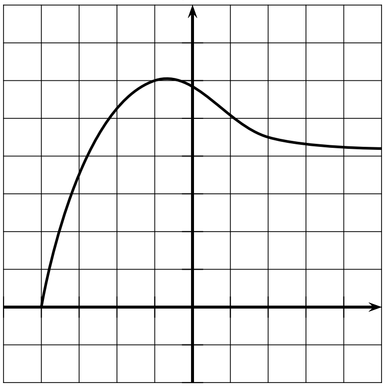
3.9

1. D'après les représentations graphiques ci-dessous, compléter les tableaux suivants en indiquant les limites et les éventuelles asymptotes.
2. Tracer les asymptotes lorsqu'il y en a.

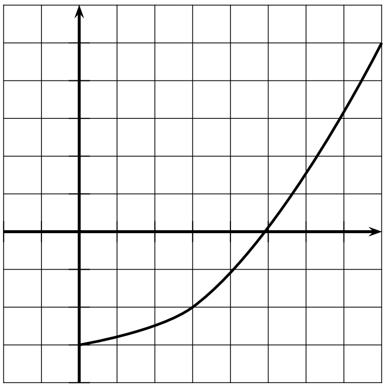
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
Limite lorsque x tend vers $+\infty$						
Y a-t-il une asymptote ?						

	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
Limite lorsque x tend vers $-\infty$			
Y a-t-il une asymptote ?			

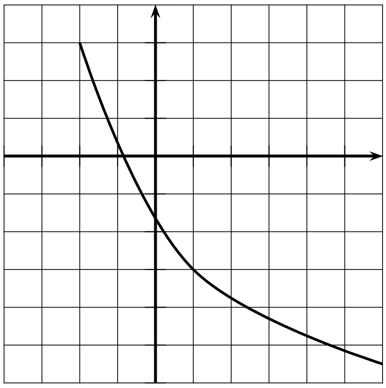
f_1



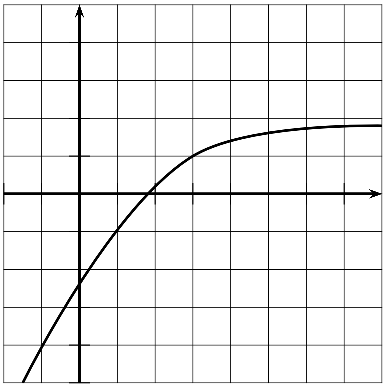
f_2



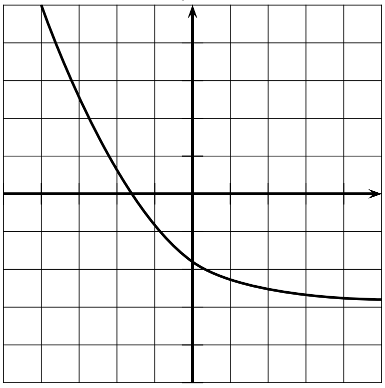
f_3



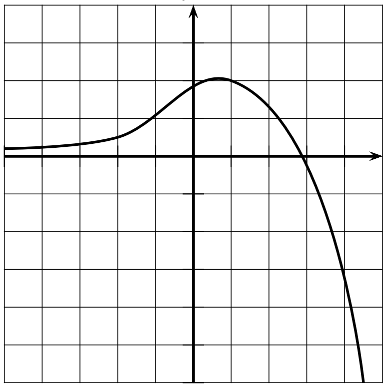
f_4



f_5



f_6



Limite infinie en un point

Remarques

- L'expression « en un point » signifie « lorsque x tend vers un nombre réel a ».
- Jusqu'ici nous avons étudié des limites de fonctions lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous allons maintenant étudier des limites de fonctions lorsque x tend vers un nombre réel a.

3.10

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

Cette fonction est une fonction de référence et l'objectif de cet exercice est d'étudier le comportement de $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers zéro.

1. Dans les tableaux ci-dessous, les valeurs de x sont de plus en plus proches de zéro. Compléter ces tableaux et indiquer quelle est apparemment le comportement de $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers zéro.

x	0,1	0,01	$0,001$	$0,000\,1$
$\dfrac{1}{x^2}$				

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	
$\dfrac{1}{x^2}$				

Il semble donc que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \ldots\ldots$

2. Quelle est la conséquence lorsque x tend vers zéro pour la représentation graphique ? Vérifier à la calculatrice.

3.11

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\infty[$.

Cette fonction est aussi une fonction de référence nous allons étudier le comportement de $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers zéro.

1. Compléter ces tableaux et indiquer comment se comporte $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers zéro.

x	0,1	0,01	$0,001$	0,000 1
$\dfrac{1}{x^2}$				

x	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$
$\dfrac{1}{x^2}$			

2. Quelle est la conséquence lorsque x tend vers zéro pour la représentation graphique ? Vérifier à la calculatrice.

3.12

La fonction f est définie par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{(x-3)^2}$ sur $]-\infty\ ;\ 3[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$.

Nous allons étudier le comportement de $f(x)$ quand x tend vers 3 et interpréter cela graphiquement.

1. Comportement de $f(x)$ quand x tend vers 3

a) Compléter les tableaux ci-dessous.

x	3,1	3,01	$3,001$	3,000 1
$f(x)$				

x	$2,9$	$2,99$	$2,999$
$f(x)$			

b) Comment se comporte $f(x)$ quand x tend vers 3 ?

2. Interprétation graphique

Suivre les consignes ci-dessous avec sa calculatrice.

a) Tracer la courbe de f à l'écran.

b) Tracer la droite d'équation $x = 3$ en suivant les consignes ci-dessous.

- Sur TI :
  $\boxed{\text{2nde}}$ [quitter] $\boxed{\text{2nde}}$ [dessin] choisir `4:Verticale`
  compléter ainsi : `Verticale 3`, puis $\boxed{\text{entrer}}$
- Sur CASIO :
  Quitter l'écran graphique : $\boxed{\text{EXIT}}$
  Si la fonction f a été définie en `Y1`, faire ce qui suit en `Y2`
  $\boxed{\text{F3}}$ (`TYPE`) $\boxed{\text{F4}}$ (`X=`) $\boxed{3}$ $\boxed{\text{EXE}}$ et on voit alors : `X2=3`
  Tracer cette droite : $\boxed{\text{F6}}$ (`DRAW`)

c) Que peut-on dire de la courbe de f et de la droite d'équation $x = 3$?

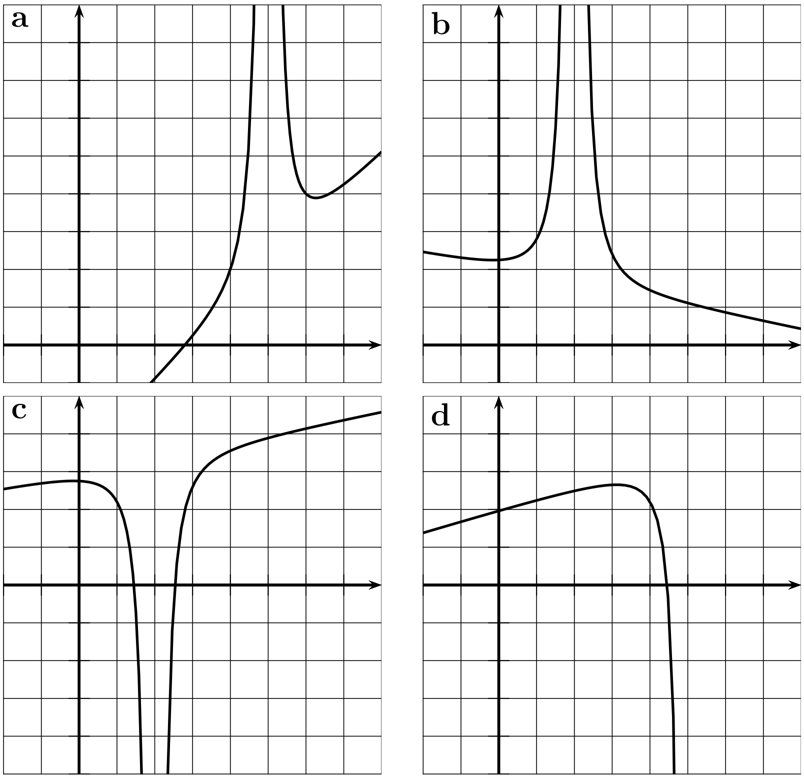
3.13

Pour chacun des graphiques ci-dessous (a, b, c, d), indiquer la limite correspondante.

Une des limites ne correspond à aucun des graphiques.

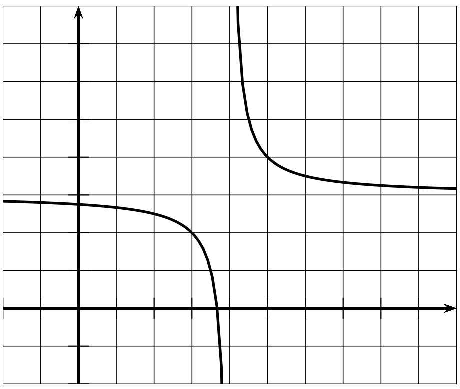
1. $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)) = -\infty$ **2.** $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}}(f(x)) = -\infty$ **3.** $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)) = +\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 5}(f(x)) = +\infty$ **5.** $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}}(f(x)) = -\infty$



Limite en un point et en l'infini

3.14



La fonction f est définie par $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x-4}$
sur $]-\infty\ ;\ 4[\ \cup\ ]4\ ;\ +\infty[$.

1. Calculer les limites suivantes en justifiant :

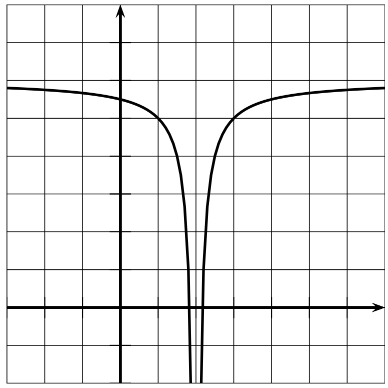
a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}(f(x)) = -\infty$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(f(x)) = -\infty$

2. Tracer les asymptotes et donner leurs équations.

3.15

La fonction f est représentée ci-contre.



1. Parmi les propositions suivantes, entourer celles qui sont vraies et barrer celles qui sont fausses.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to 6}(f(x)) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)) = 2$ **d)** $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)) = 6$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)) = 6$

2. Tracer les asymptotes et donner leurs équations.

3.16

1. La fonction f a les propriétés suivantes.

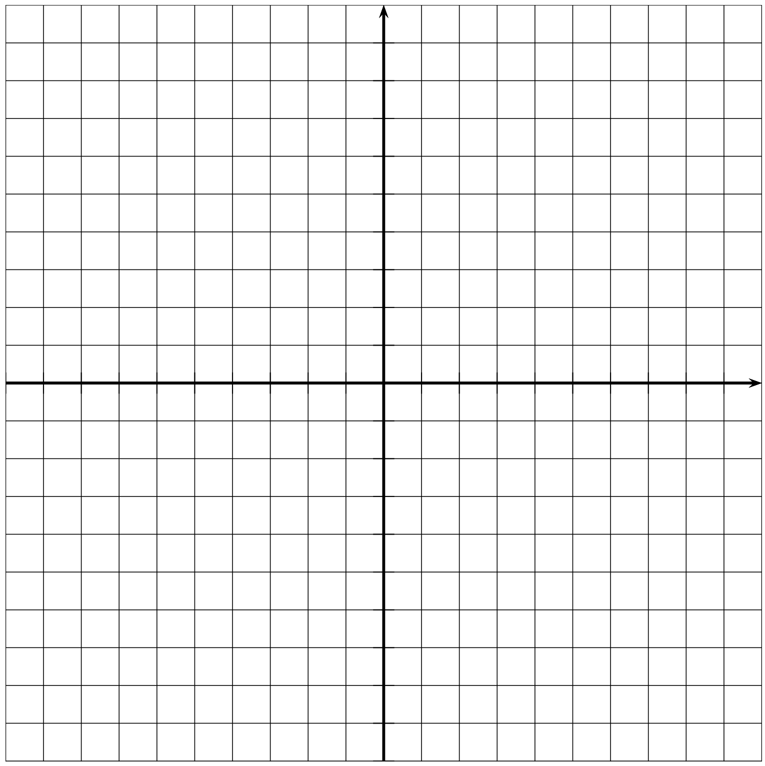
$\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x)) = 2$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)) = 2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ x<6}}(f(x)) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ x>6}}(f(x)) = -\infty$

Dans le repère ci-contre, tracer une représentation graphique possible de la fonction f.



2. Tracer les asymptotes et donner leurs équations.

3.17

D'après les tableaux de variations ci-dessous tracer schématiquement plus bas les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4. Tracer les asymptotes quand il y en a.

On précise que les tableaux ci-dessous indiquent que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f_1(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f_2(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f_3(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f_3(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f_4(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f_4(x) = -\infty$

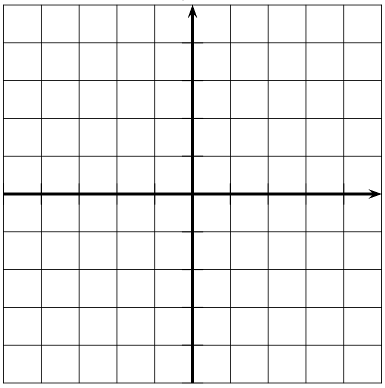
x	0		$+\infty$
$f_1(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$

x	-4		$+\infty$
$f_2(x)$	-2	$\nearrow$	0

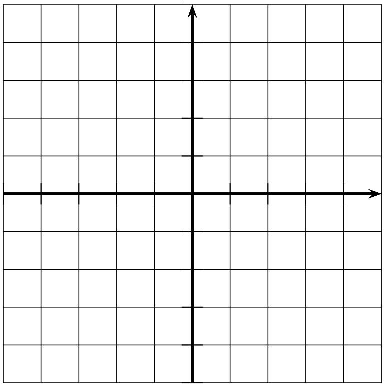
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_3(x)$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_4(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

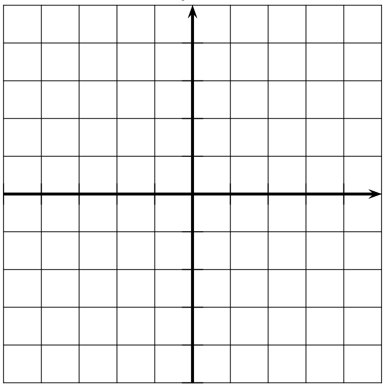
f_1



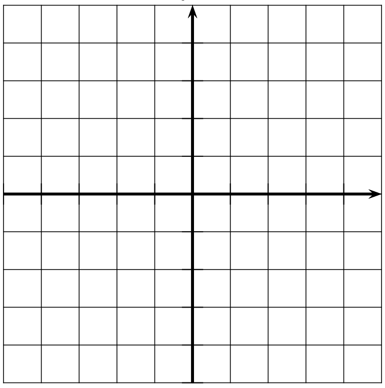
f_2



f_3



f_4



Limite d'une composée de deux fonctions

3.18

La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{4x^3 + 6x}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Conjecturer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Lire le paragraphe 3.4 du cours, et ses exemples.

3. Justifier la conjecture du **1.**

Exercices divers sur les limites

3.19

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x^2-1}{x+4}\right)$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2+4x^3-8)$ **3.** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(7+\dfrac{1}{x}\right)$ **4.** $\lim\limits_{x\to0} \left(\sqrt{6+\dfrac{1}{x^2}}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5x\sqrt{x^3+9}\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to3} \left(\dfrac{4}{(x-3)^2}\right)$

3.20

Déterminer les limites suivantes en justifiant.

1. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{x}}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{6+\dfrac{1}{x}}{x^2+1}\right)$
2. Limite de $\dfrac{6}{x-2}$ quand x est supérieur à 2 et tend vers 2.
3. Limite de $\dfrac{4}{x-3}$ quand x est inférieur à 3 et tend vers 3.

3.21

Déterminer les limites suivantes, en justifiant.

1. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+5\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ c'est à dire limite de $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand x est positif et tend vers 0.

3.22

La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ sur $]2\ ;\ +\infty[$

1. Justifier par un calcul que pour tout réel x de l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$, $f(x)=3+\dfrac{7}{x-2}$
2. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et lorsque est supérieur à 2 et tend vers 2.
3. D'après les résultats sur les limites, quelles sont les droites asymptotes à la courbe représentative de la fonction f ?
4. Calculer la dérivée de f.
5. Sans justifier, dresser un tableau qui donne le signe de la dérivée, les variations de la fonction f et les limites.
6. Vérifier en traçant la courbe sur l'écran de la calculatrice.

Limite et comparaison

3.23

1. Soit une fonction f_1 définie sur $[0\,;\ +\infty[$, telles que pour tout nombre x de cet intervalle $f_1(x)\geqslant x^2$. Que peut-on en déduire pour la fonction f_1 lorsque x tend vers $+\infty$?
2. Soit une fonction f_2 définie sur $[0\,;\ +\infty[$, telles que pour tout nombre x de cet intervalle $f_2(x)\leqslant -x^3$. Que peut-on en déduire pour la fonction f_2 lorsque x tend vers $+\infty$?

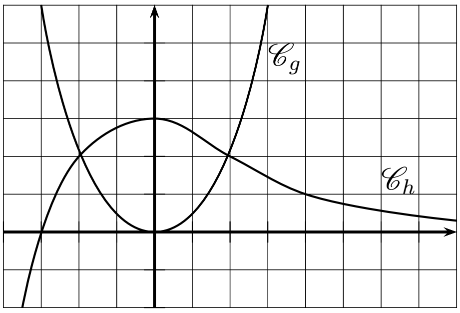
3.24

Soit une fonction f telle que pour tout nombre réel x, $\quad x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$

1. Peut-on en déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
2. Peut-on en déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?
3. Tracer un repère, tracer les représentations graphiques des fonctions $x \longmapsto x - 1$, $x \longmapsto x^2$, puis tracer une représentation graphique possible de la fonction f.

3.25

Dans le repère ci-dessous, d'unité 1 carreau, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont des courbes de deux fonctions définies sur $]-\infty\,;\,+\infty[$.



1. D'après les représentions graphique, quelles sont apparemment les limites de $g(x)$ et de $h(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$?
   On admettra que ces limites sont vraies.
2. Si f est une fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout réel x, on a $f(x) \geqslant g(x)$, peut-on en déduire les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$? Si oui, les donner.
3. Si k est une fonction définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout réel x, on a $k(x) \leqslant h(x)$, peut-on en déduire les limites de $k(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$? Si oui, les donner.

Continuité

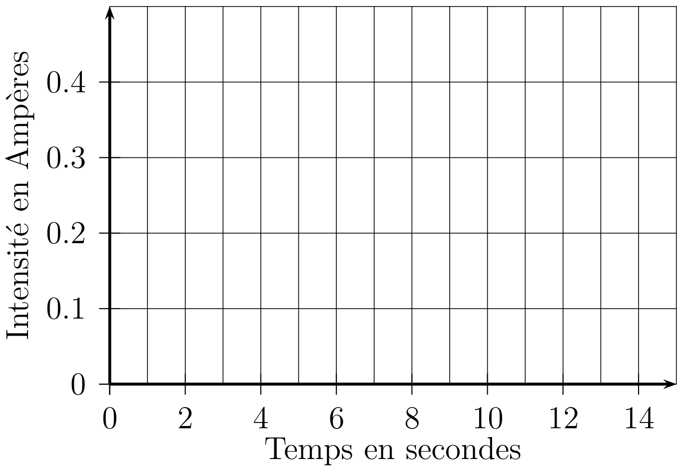
3.26

L'objectif de cet exercice est d'étudier ce qu'est une fonction continue et ce qu'est une fonction non continue.

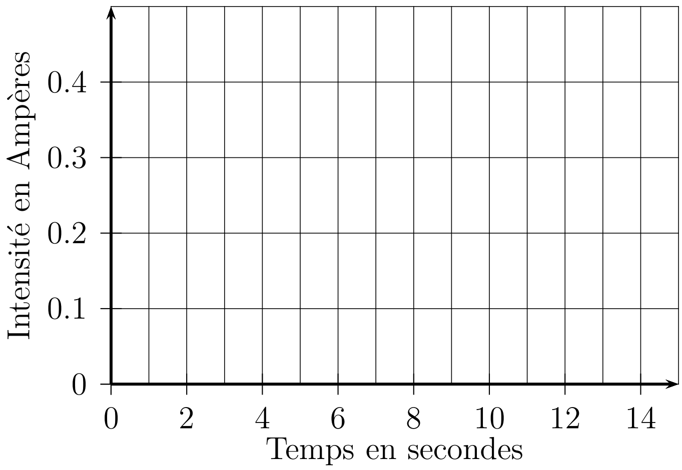
1. **1re situation :** on considère l'intensité du courant électrique (en Ampères) passant dans une ampoule pendant 15 secondes. Dans le repère qui se trouve plus bas, tracer la représentation graphique de cette intensité électrique en fonction du temps d'après les explications ci-dessous. On appelle cette fonction f.
   - Pendant les 5 premières secondes la lampe est éteinte ;
   - à la 5e seconde quelqu'un allume et le courant passe brutalement de 0 à 0,5 Ampères ;
   - de la 5e seconde à la 10e la lampe est allumée ;
   - à la 10e seconde il éteint et le courant passe brutalement de 0,5 à 0 A ;
   - ensuite l'ampoule reste éteinte.

2. **2^{e} situation :** même consigne que dans la question précédente pour une autre ampoule, pendant 15 secondes, d'après les explications ci-dessous. On appelle cette fonction g.
   - Pendant les 3 premières secondes la lampe est éteinte ;
   - de la 3^{e} à la 5^{e} seconde quelqu'un allume avec un interrupteur variateur et le courant passe progressivement de 0 à 0,5 Ampères ;
   - de la 5^{e} seconde à la 10^{e} la lampe est allumée ;
   - de la 10^{e} à la 12^{e} seconde il éteint et le courant passe progressivement de 0,5 à 0 A ;
   - ensuite l'ampoule reste éteinte.
3. Lorsque la courbe d'une fonction se trace d'un trait continu, c'est à dire « sans lever le crayon », on dit que cette fonction est continue. Répondre aux questions suivantes sans justifier.
   a) La fonction f est-elle continue ? ....
   b) La fonction g est-elle continue ? ....
   c) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle [0 s ; 4 s] ? ....
   d) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle [7 s ; 12 s] ? ....
   e) La fonction g est-elle continue sur l'intervalle [0 s ; 4 s] ? ....
   f) La fonction g est-elle continue sur l'intervalle [7 s ; 12 s] ? ....

1re situation – fonction f



2^{e} situation – fonction g



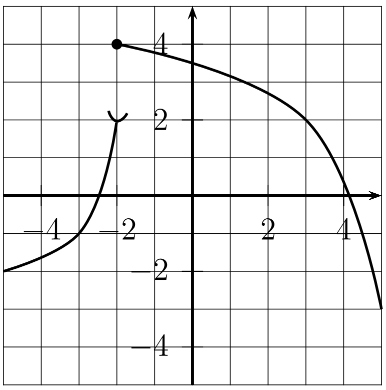
3.27

Objectif : savoir reconnaître graphiquement une fonction continue ou discontinue

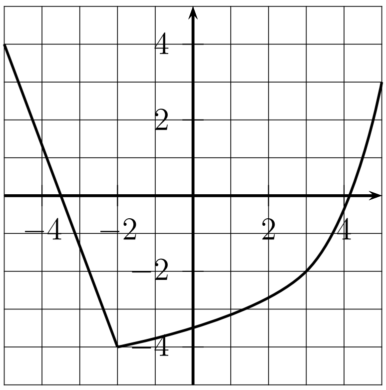
Répondre aux questions suivantes sans justifier.

1. La fonction f est-elle continue sur $[-5\,;5]$? .... sur $[-1\,;3]$? ....
2. La fonction g est-elle continue sur $[-5\,;5]$? .... sur $[-4\ ;\ -2]$? ....
3. La fonction h est-elle continue sur $[-5\,;5]$? .... sur $[-3\ ;\ -0]$? ....

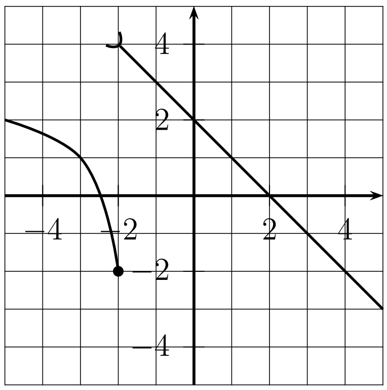
Courbe $\mathscr{C}_f$



Courbe $\mathscr{C}_g$



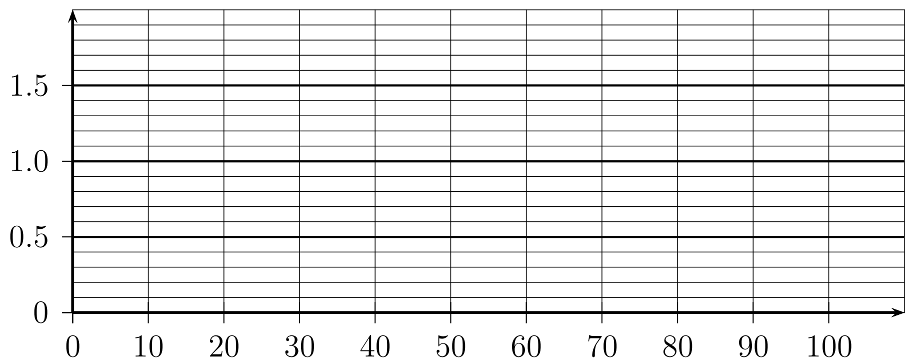
Courbe $\mathscr{C}_h$



3.28

1. Dans le repère ci-dessous, tracer la représentation graphique de la fonction f correspondant au tarif postal du tableau ci-dessous.
2. Cette fonction « tarif postal» est-elle continue sur l'intervalle $[0\,;\,100]$?

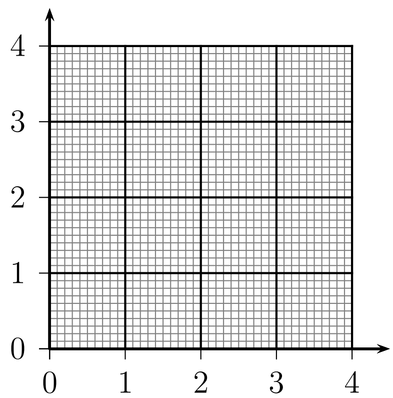
Poids (g)	Tarif (€)
$[0\,;\,20[$	0,60
$[20\,;\,50[$	1,00
$[50\,;\,100]$	1,50



3.29 La fonction partie entière

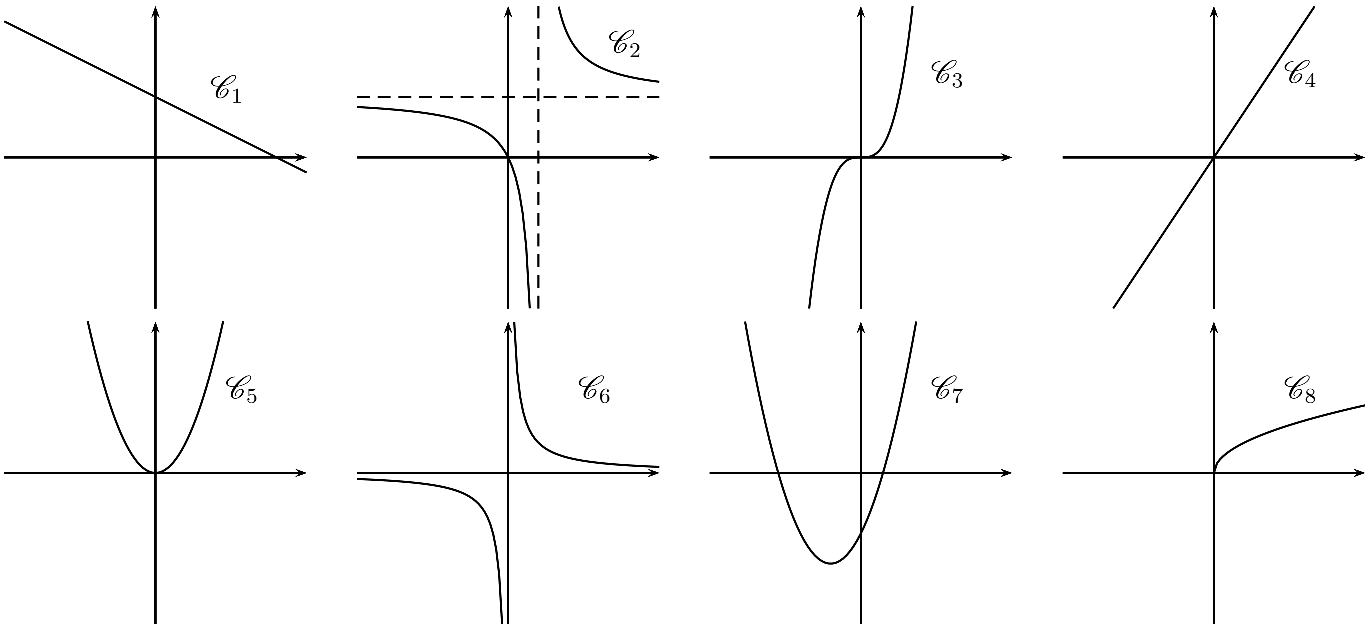
Un nombre entier positif est égal à sa partie entière, par exemple $\mathrm{E}(5) = 5$ et $\mathrm{E}(0) = 0$.
Pour un nombre non entier, voici deux exemples, $\mathrm{E}(2,7) = 2$ et $\mathrm{E}(11,25) = 11$

1. Tracer ci-contre la représentation graphique de la fonction partie entière sur l'intervalle $[0\ ;\ 3[$.
2. La fonction partie entière est-elle continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 3[$?



3.30 Fonctions usuelles

Objectif : revoir rapidement les représentations graphiques des fonctions affines et linéaires, carré, polynômes du second degré, inverse, homographiques, racine carrée, cube, et indiquer si ces fonctions sont continues ou non.



Les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8 sont définies par

$f_1(x) = x^2 + 2x - 2$ $\quad$ $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $f_3(x) = 1,5x$ $\quad$ $f_4(x) = \sqrt{x}$

$f_5(x) = x^3$ $\quad$ $f_6(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ $\quad$ $f_7(x) = -0,5x + 2$ $\quad$ $f_8(x) = x^2$

1. Pour chacune des fonctions, indiquer quelle est sa représentation graphique parmi les courbes ci-dessus.
2. Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
3. Chacune des fonctions f_1 à f_8 est-elle continue sur son ensemble de définition ?

Continuité et équation $f(x) = k$

3.31

L'objectif de cet exercice est d'aborder le théorème de la valeur intermédiaire et de le comprendre intuitivement.

Une course cycliste de 40 km commence à l'altitude de 200 m et se termine à l'altitude de 800 m.

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,40]$, x est la distance en km depuis le départ, et $f(x)$ est l'altitude à la distance x. On a donc $f(0) = 200$ et $f(40) = 800$.

Figure 1

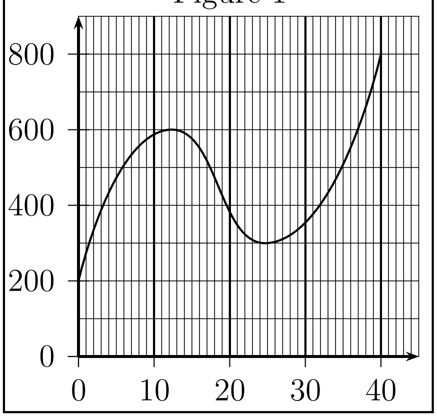
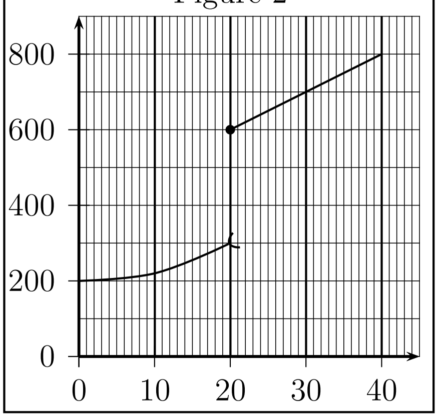


Figure 2



Partie A

1. La figure 1 donne une représentation graphique possible pour la fonction f.
   a) Est ce que le parcours passe par toutes les altitudes intermédiaires entre 200 m et 800 m ?
   b) Est ce que le parcours peut passer plusieurs fois par une altitude intermédiaire entre 200 m et 800 m ? Donner un exemple et tracer des traits sur le graphique.
2. La représentation graphique de la figure 2 est-elle possible ? Pourquoi ? Donner une raison mathématique et une raison intuitive.

Partie B

1. Sur la figure 1 la fonction f est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 40]$. On choisit n'importe quel nombre k entre $f(0)$ et $f(40)$. Peut-on dire que l'équation $f(x) = k$ admet (toujours) au moins une solution ?
2. Sur la figure 2 la fonction f n'est pas continue sur l'intervalle $[0\ ;\ 40]$. On choisit n'importe quel nombre k entre $f(0)$ et $f(40)$. Peut-on dire que l'équation $f(x) = k$ admet (toujours) au moins une solution ?

3.32

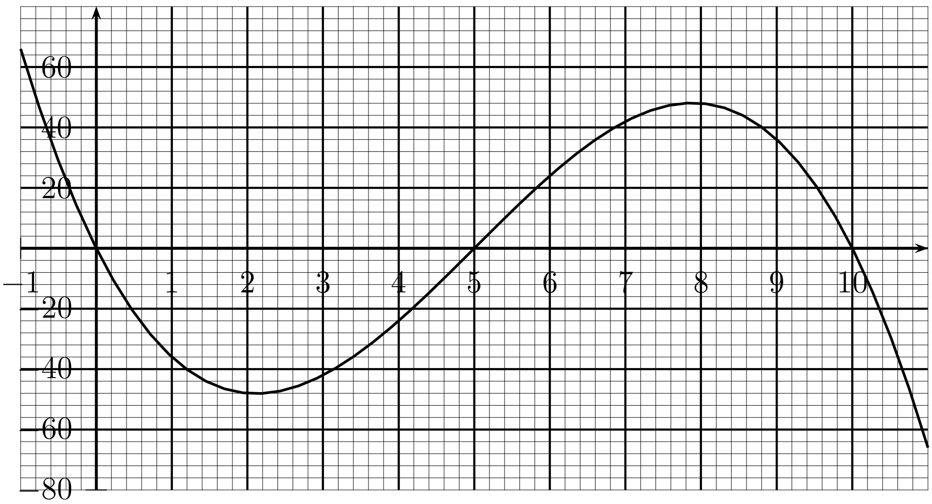
Objectifs :

- *utiliser le théorème de la valeur intermédiaire ;*
- *utiliser la calculatrice pour résoudre approximativement une équation $f(x) = k$.*

La fonction représentée graphiquement ci-dessous est la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 50x$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 11]$.

1. a) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ 11]$? Justifier d'après le cours.
   b) Calculer $f(-1)$ et $f(11)$ (à la calculatrice, sans détailler).
   c) Justifier que l'équation $f(x) = 20$ a au moins une solution sur l'intervalle $[-1\ ;\ 11]$.
2. Peut-on résoudre l'équation $f(x) = 20$ de manière exacte ? Expliquer sa réponse.
3. Déterminer graphiquement des valeurs approchées des solutions avec la précision permise par le graphique. Traçer des traits sur le graphique.
4. En utilisant la calculatrice, déterminer un encadrement de chacune des solutions au millième près. Pour cela, tracer à l'écran la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = 20$. Il faut ensuite déterminer avec précision les coordonnées des points d'intersection.

Sur TI 82	Sur TI 89	Sur CASIO
Pour chaque intersection, exécuter les étapes a) à d). **a)** Touches $\boxed{\text{2nde}}$ [calculs]. **b)** Choisir `5:intersect`. **c)** `Courbe 1?` $\boxed{\text{entrer}}$ `Courbe 2?` $\boxed{\text{entrer}}$. **d)** `Valeur Init?` Saisir un nombre proche d'une solution puis $\boxed{\text{entrer}}$. On voit alors les coordonnées du point d'intersection.	Pour chaque intersection, exécuter les étapes a) à d). **a)** Touche $\boxed{\text{F5}}$ **b)** Choisir `5:intersect`. **c)** `Courbe 1?` $\boxed{\text{entrer}}$ `Courbe 2?` $\boxed{\text{entrer}}$. **d)** `Borne inf?` Saisir un nombre inférieur à une solution puis $\boxed{\text{entrer}}$. `Borne sup?` idem avec nombre supérieur. On voit alors les coordonnées du point d'intersection.	Touches $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{F5}}$ (G-Solv) puis $\boxed{\text{F5}}$ (ISCT) Une croix clignote sur une intersection et on voit les coordonnées du point d'intersection. Pour obtenir l'intersection suivante, appuyer sur $\boxed{\rightarrow}$.



II Cours

3.1 Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

Remarque :

- l'expression « en $+\infty$ » signifie « lorsque x tend vers $+\infty$ » ;
- l'expression « en $-\infty$ » signifie « lorsque x tend vers $-\infty$ ».

3.1.a Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$

Définitions

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$
signifie que
tout intervalle ouvert $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$
signifie que
tout intervalle ouvert $]-\infty\ ;\ A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarque :

On définit de manière analogue :

- une fonction f qui a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$;
- une fonction f qui a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.

3.1.b Limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ et interprétation graphique

Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$
signifie que
tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand.
On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

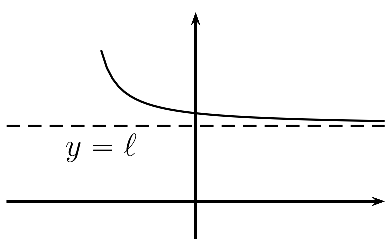
Remarque :

On définit de manière analogue une fonction f qui a pour limite ℓ lorsque x tend vers $-\infty$

Interprétation graphique

Définition – Asymptote horizontale

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de f.



3.1.c Limites des fonctions de référence en l'infini

n est un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ si n est pair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

si n est impair $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

3.2 Limite infinie en un point

Remarque : l'expression « en un point » signifie « lorsque x tend vers un nombre réel a ».

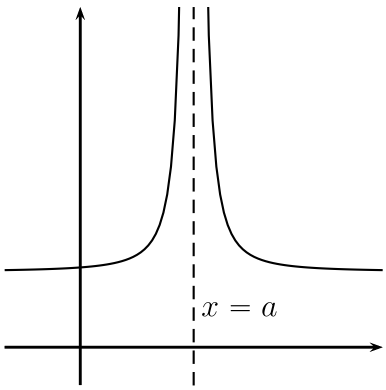
3.2.a Définition

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers un nombre réel a
signifie que
tout intervalle ouvert $]B\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez proche de a.
On écrit : $\lim\limits_{x \to a} (f(x)) = +\infty$

3.2.b Interprétation graphique

Définition – Asymptote verticale

Lorsque $\lim\limits_{x \to +a} f(x) = +\infty$ ou lorsque $\lim\limits_{x \to +a} f(x) = -\infty$,
on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.



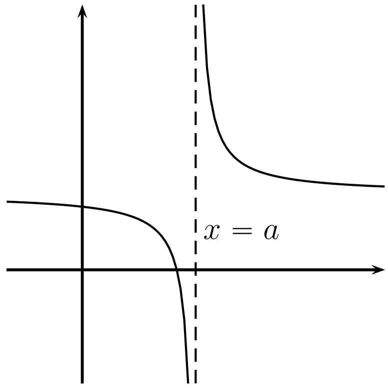
3.2.c Limite à gauche et à droite en un point

Il arrive que la limite d'une fonction f ne soit pas la même selon que x tend vers a en étant supérieur à a ou que x tend vers a en étant inférieur à a.

La limite d'une fonction f lorsque x tend vers a en étant supérieur à a s'écrit $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^+} (f(x))$

La limite d'une fonction f lorsque x tend vers a en étant inférieur à a s'écrit $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} (f(x))$

Exemple
Pour la fonction f représentée graphiquement sur la figure ci-contre, on a :
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$



3.2.d Limites des fonctions de référence en zéro

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

Pour tout entier naturel n pair non nul, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$

Pour tout entier naturel n impair non nul, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{1}{x^n}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{1}{x^n}\right) = +\infty$

3.3 Opérations sur les limites

Les tableaux ci-dessous sont identiques aux tableaux donnés pour les suites au paragraphe 1.9 page 1-23.

Précisions concernant ces tableaux

- ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.
- Ces tableaux concernent aussi bien des situations où x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou vers un nombre a.
- Pour obtenir le signe concernant le produit ou le quotient, il faut appliquer la règle des signes.
- FI signifie *forme indéterminée*, c'est à dire qu'on ne peut pas conclure.

Limite d'une somme

$\lim f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim g(x)$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim(f(x)\times g(x))$	$\ell \times \ell'$	∞	∞	FI

Limite d'un quotient

$\lim f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	0	∞	∞	∞
$\lim g(x)$	$\ell' \neq 0$	0	∞	0	$\ell' \neq 0$	0	∞
$\lim\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	FI	∞	∞	FI

3.4 Limite d'une composée de deux fonctions

Propriété

Ci-dessous, a, b, c désignent soit un nombre réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a}(u(x)) = b$, et si $\lim\limits_{X\to b}(f(x)) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a}(f(u(x))) = c$.

Exemples

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}(\sqrt{X}) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{x}\right) = 5$ et $\lim\limits_{X\to 5}(\sqrt{X}) = \sqrt{5}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5+\dfrac{1}{x}}\right) = \sqrt{5}$.

3.5 Limites et comparaison

3.5.a Limite infinie et comparaison

Propriété 1

Si pour tout nombre x dans un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Propriété 2

Si pour tout nombre x dans un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$,
alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarques

- Les deux propriétés restent vraies quand x tend vers $-\infty$, en remplaçant $]A\ ;\ +\infty[$ par $]-\infty\ ;\ A[$.
- Les deux propriétés restent aussi vraies quand x tend vers un nombre a en remplaçant $]A\ ;\ +\infty[$ par un intervalle ouvert qui contient a.

3.5.b Limite finie et comparaison – Théorème des gendarmes

Propriété

Si pour tout nombre x dans un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$
et si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = \ell$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)) = \ell$,
alors $\lim\limits_{x\to a}(g(x)) = \ell$.

Remarques

- Cette propriété reste vraie quand x tend vers $-\infty$, en remplaçant $]A\ ;\ +\infty[$ par $]-\infty\ ;\ A[$.
- Cette propriété reste aussi vraie quand x tend vers un nombre a en remplaçant $]A\ ;\ +\infty[$ par un intervalle ouvert qui contient a.

3.6 Continuité

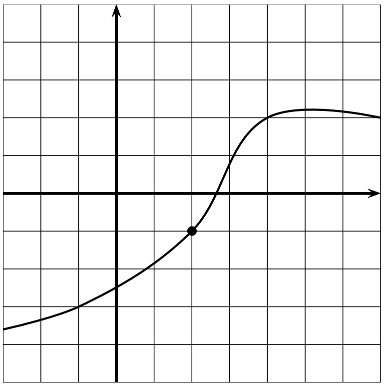
3.6.a Définitions

Définition – Continuité en un point

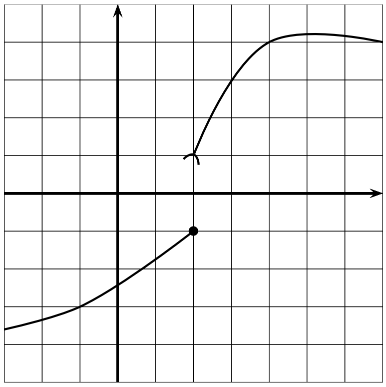
Dire que f est continue en a signifie que
- f est définie en a
- f a une limite en a égale à $f(a)$ autrement dit $\lim\limits_{x\to a}(f(x)) = f(a)$.

Exemples

f est continue en 2 car $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)) = f(2) = -1$.



f n'est pas continue en 2 car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<2}}(f(x)) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>2}}(f(x)) = 1 \neq -1$



Définition – Continuité sur un intervalle

Dire que f est continue sur un intervalle signifie que
- f est définie sur cet intervalle ;
- f est continue en tout nombre réel de cet intervalle.

Remarque

Intuitivement, on dit qu'une fonction est continue sur un intervalle lorsque la courbe de cette fonction se trace d'un trait continu, c'est à dire « sans lever le crayon ».

3.6.b Continuité des fonctions usuelles

Propriété

Les fonctions usuelles sont continues sur leurs ensembles de définition.
Plus précisément :
- les fonctions linéaires et affines sont continues sur $\mathbb{R}$, c'est à dire sur $]-\infty\,;\,+\infty[$
- les fonctions carré, cube, et toutes les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- la fonction racine carrée est continue sur $[0\,;\,+\infty[$
- la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$ c'est à dire sur $]-\infty\;;\;0[\,\cup\,]0\;;\;+\infty[$
- les fonctions rationnelles, c'est à dire les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ où g et h sont des fonctions polynômes, sont continues sur leur ensemble de définition

3.6.c Fonction dérivable et continuité

Propriété

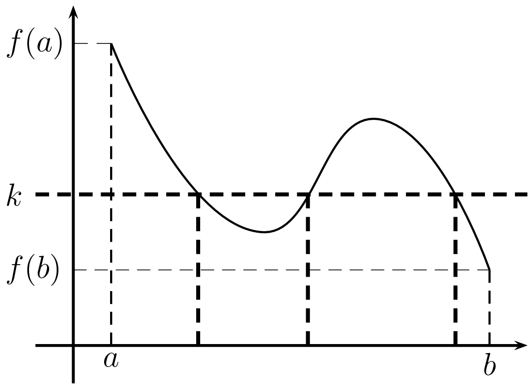
Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

3.6.d Théorème des valeurs intermédiaires

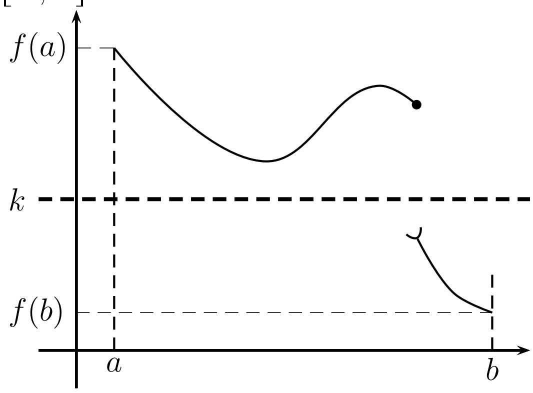
Si	• f est une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, • k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
alors	l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution qui est dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Exemples

La fonction f représentée ci-dessous est continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution qui est dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



La fonction f représentée ci-dessous n'est pas continue sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, et il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, tels que l'équation $f(x) = k$ n'admette aucune solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.



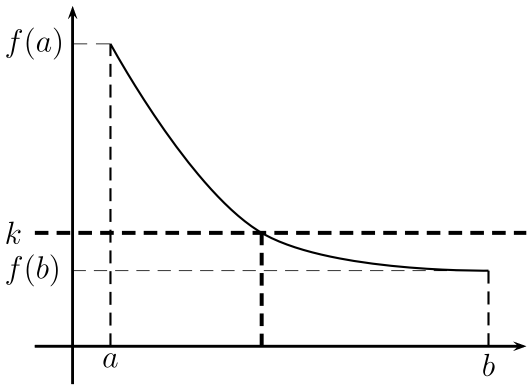
3.6.e Théorème de la valeur intermédiaire pour une fonction strictement monotone

Vocabulaire : dire qu'une fonction est **monotone** sur un intervalle signifie que cette fonction est croissante sur cet intervalle ou décroissante sur cet intervalle.

Théorème

Si	• f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, • k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
alors	l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique qui est dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

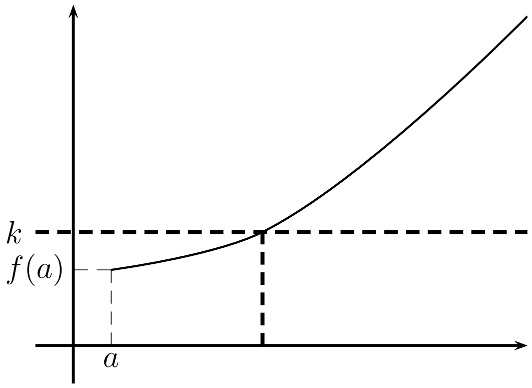
Exemple



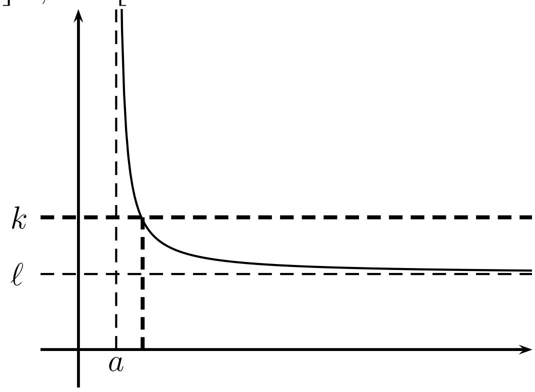
Remarque et exemples

On peut aussi utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour une fonction strictement monotone sur des intervalles ouverts ou semi-ouverts. Voici deux exemples.

Exemple 1
La fonction f est continue et strictement croissante sur $[a\ ;\ +\infty[$
et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = +\infty$,
et k est un nombre réel supérieur à $f(a)$ (donc compris entre $f(a)$ et $+\infty$),
donc l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique qui est dans l'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$.



Exemple 2
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]a\ ;\ +\infty[$
et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}(f(x)) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = \ell$,
et k est un nombre réel supérieur à ℓ (donc compris entre ℓ et $+\infty$),
donc l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique qui est dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



3.6.f Continuité dans les tableaux de variations

Convention

Dans les tableaux de variation, une flèche oblique indique que sur cet intervalle la fonction est continue est strictement croissante ou continue et strictement décroissante.

Exemple : le tableau de variation ci-dessous indique que

- la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$
- la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,4]$

x	0		1		4
$f(x)$	5	↗	8	↘	6