Chapitre 4

Dérivation

I Exercices

4.1

Chacune des fonctions définies ci-dessous est dérivable sur l'intervalle I qui est indiqué. Calculer les dérivées de ces fonctions.

1. $f(x) = 9x^5 + \dfrac{2}{x}$ $\qquad I =]0\ ;\ +\infty[$

2. $f(x) = (3x^2 - 7x + 4)\sqrt{x}$ $\qquad I =]0\ ;\ +\infty[$

3. $f(x) = \dfrac{8}{x^2+1}$ $\qquad I = \mathbb{R}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x+1}$ $\qquad I =]-1\ ;\ +\infty[$

4.2

Même exercice que le précédent, pour les fonctions définies ci-dessous et les intervalles correspondants.

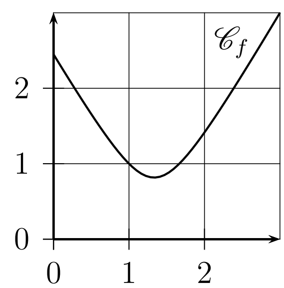
1. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 7}$ $\qquad I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = (6x-1)^4$ $\qquad I = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(5x-8)^3}$ $\qquad I =]2\ ;\ +\infty[$ $\qquad$ Indication : $\dfrac{1}{(5x-8)^3} = (5x-8)^{-3}$

4.3

La fonction f est définie par $f(x) = \sqrt{3x^2 - 8x + 6}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Cette fonction est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, de dérivée f'.
La fonction f est représentée ci-contre sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$, par la courbe $\mathscr{C}_f$.



1. a) Calculer la valeur exacte de $f(0)$.

b) Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$.

3. a) Sur la courbe $\mathscr{C}_f$, placer le point A d'abscisse 1.

b) Calculer le coefficient directeur de la droite (d) tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.

c) Tracer la tangente (d).

d) Calculer l'équation réduite de la tangente (d).

4. Étudier le signe de la dérivée.

5. Dresser un tableau comprenant le signe de la dérivée, les variations de f, et les valeurs remarquables, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

6. La fonction f atteint un minimum sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

a) En quelle valeur de x est atteint ce minimum ? Justifier et donner sa valeur exacte.

b) Calculer ce minimum. Donner la valeur exacte.

4.4

La fonction f est définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Cette fonction est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, de dérivée f'.

1. Déterminer les limites de f lorsque x tend vers 0 en étant positif, et lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$.

3. Étudier le signe de la dérivée.

4. Dresser un tableau comprenant le signe de la dérivée, les variations de f, et les valeurs remarquables.

5. Vérifier en traçant la courbe à la calculatrice.

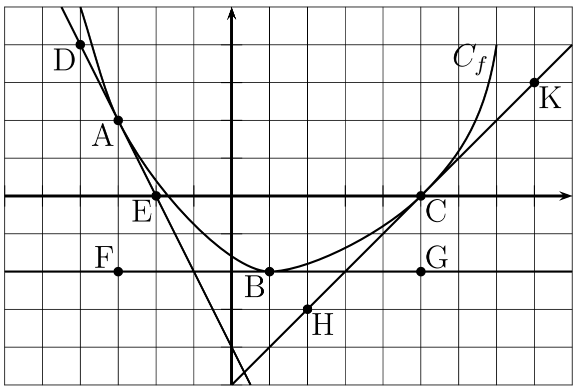
4.5

La fonction f représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$ est définie et dérivable sur $[-4\ ;\ 7]$. L'unité du repère est un carreau.

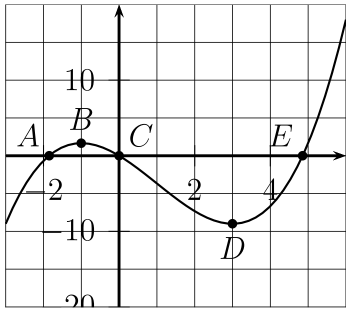
Les points A, B, C sont des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites (DE), (FG), (HK) sont les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectivement en A, en B, en C.

1. Par lecture graphique, déterminer $f(-3)$, $f(1)$, $f(5)$, $f'(-3)$, $f'(1)$, $f'(5)$.

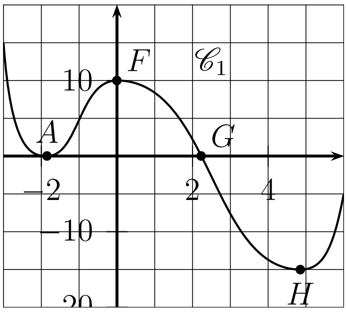
2. Déterminer les équations réduites des tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A, en B, en C, nommées respectivement (T_A), (T_B), (T_C).

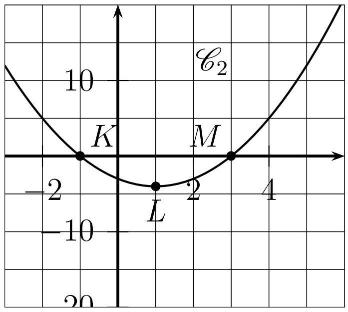


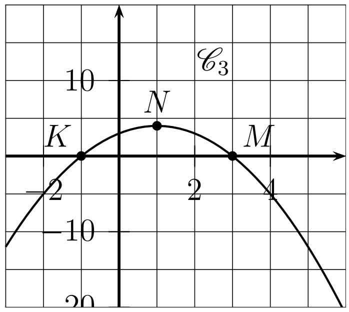
4.6



Une fonction f est représentée ci-contre. Parmi les trois courbes ci-dessous, laquelle représente la dérivée de f ?
on donne les coordonnées suivantes :
$A(-1,9\ ;\ 0)$ $B(-1\ ;\ 1,7)$ $C(0\ ;\ 0)$ $D(3\ ;\ -9)$
$E(4,9\ ;\ 0)$ $F(0\ ;\ 10)$ $G(2,2\ ;\ 0)$ $H(4,9\ ;\ -15)$
$K(-1\ ;\ 0)$ $L(1\ ;\ -4)$ $M(3\ ;\ 0)$ $N(1\ ;\ 4)$





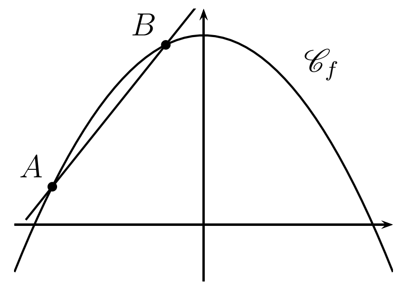


II Cours

4.1 Taux de variation (1re S)

Pour une fonction f représentée par une courbe $\mathscr{C}_f$, et pour deux points A et B de cette courbe,

- la droite (AB) s'appelle une **corde** de la courbe $\mathscr{C}_f$;
- le coefficient directeur de cette corde (AB) est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ c'est à dire $\dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$;
- $\dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$ est appelé **taux de variation de f entre x_A et x_B**.



4.2 Nombre dérivé d'une fonction (1re S)

Définition

Une fonction f est définie sur un intervalle I, et a et h sont deux nombres réels tels que a et $a+h$ soient dans l'intervalle I.
Dire que la fonction f a un nombre dérivé en a signifie que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel quand h tend vers 0.
Ce nombre est appelé le **nombre dérivé de la fonction f en a**.

Exemple

La fonction f est définie par $f(x) = 5 - x^2$.

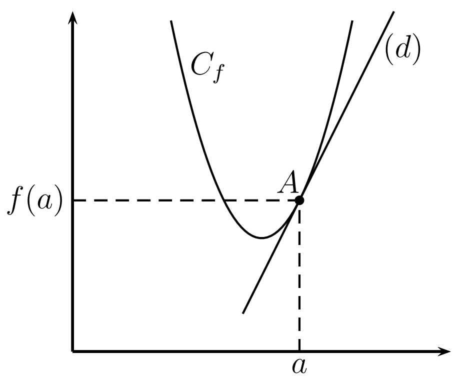
$a = 1$ $\quad h = 0,5 \quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(1,5)-f(1)}{0,5} = -2,5$

$a = 1$ $\quad h = 0,1 \quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(1,1)-f(1)}{0,1} = -2,1$

$a = 1$ $\quad h = 0,001 \quad \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(1,001)-f(1)}{0,001} = -2,001$

En voyant ces résultats successifs, on admet que $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ tend vers -2 quand h tend vers 0, par conséquent $\boxed{\text{le nombre dérivé de } f \text{ en 1 est égal à } -2}$.

4.3 Tangente à la courbe (1re S) .



Pour une fonction f dérivable en a,
le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point de cette courbe d'abscisse a.

Pour une fonction f dérivable en a, l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est :

$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

4.4 Fonction dérivée (1re S).

Définition

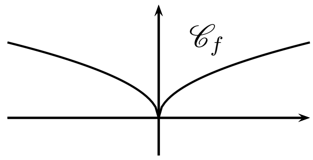
Dire qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle signifie que f est définie sur cet intervalle et que pour tout nombre a de cet intervalle f admet un nombre dérivé en a.

Définition

Pour une fonction f dérivable sur un intervalle la fonction qui à tout nombre a de cet intervalle associe le nombre dérivé en a s'appelle la fonction dérivée de f, et on la note f'.

Remarque et exemple

Une courbe représente une fonction dérivable en a si on peut tracer une tangente au point de cette courbe d'abscisse a.
Par exemple, la fonction f représentée à droite n'est pas dérivable en 0.



4.5 Calcul de dérivée

Tableau 1 – Dérivées des fonctions usuelles (1re S)

$f(x) = \cdots$	$f'(x) = \cdots$	f dérivable sur $\cdots$
k constante	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$

Tableau 2 – Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient (1re S).

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k est une constante.

Dérivée	Condition
$(u+v)' = u' + v'$	
$(ku)' = k \times u'$	
$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
$(uv)' = u'v + v'u$	
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Compléments de terminale

- u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et n est un nombre entier relatif non nul.
  alors : $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$ (u ne s'annule pas sur I) et : $\boxed{\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}}$
- f est une fonction dérivable
  si g est définie sous la forme : $\boxed{g(x) = f(ax+b)}$ alors : $\boxed{g'(x) = a \times f'(ax+b)}$

Remarque

Les trois formules de dérivées précédentes viennent en fait d'une seule formule de dérivée, indiquée ci-dessous, mais le programme n'exige pas qu'un élève de terminale S connaisse cette formule.

$\boxed{\left(f(u)\right)' = u' \times f'(u)}$

4.6 Variations de fonctions sans la dérivée (1re S)

On peut utiliser la dérivée d'une fonction dérivable pour étudier ses variations, comme cela est rappelé au paragraphe suivant. Cependant, il est possible d'étudier le sens de variation de certaines fonctions sans utiliser la dérivée.

Fonctions dont on sait étudier les variations sans utiliser la dérivée

- fonctions carré, inverse, valeur absolue, racine,
- fonctions affines et polynômes du second degré,
- fonctions de la forme $u+k$, λu, $\sqrt{u}$, $\dfrac{1}{u}$, où u est une fonction carré, inverse, valeur absolue, racine, ou affine.

4.7 Sens de variation et signe de la dérivée, extrémum (1re S)

Propriété – Sens de variation et signe de la dérivée

- Une fonction f dérivable sur un intervalle est croissante sur cet intervalle *si et seulement si* sa dérivée f' est positive cet intervalle.
- Une fonction f dérivable sur un intervalle est décroissante sur cet intervalle *si et seulement si* sa dérivée f' est négative cet intervalle.
- Une fonction f dérivable sur un intervalle est constante sur cet intervalle *si et seulement si* sa dérivée f' est nulle sur cet intervalle.

Définitions – Extrémum local

- $f(a)$ est un maximum local de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de f sur I.
- $f(a)$ est un minimum local de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le minimum de f sur I.
- $f(a)$ est un extremum local de f signifie que $f(a)$ est un maximum ou un minimum local de f

Propriété – Dérivée et extrémum local

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre de cet intervalle.
Si $f(a)$ est un extrémum local de f, alors $f'(a) = 0$.

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre de cet intervalle.
Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extrémum local de f.