Chapitre 4

Matrices carrées et systèmes

I Exercices

4.1 Propriétés du produit des matrices carrées

4.1.a Commutativité

L'addition et la multiplication des nombres sont commutatives c'est à dire que pour tous nombres réels a et b, $a+b=b+a$ et $a\times b=b\times a$.

Pour les matrices l'addition des matrices est commutative c'est à dire que pour toutes matrices A et B de même format, $A+B=B+A$.

Qu'en est-il pour la multiplication des matrices carrées ?

Exercice 4.1 (Le produit de matrices carrées est-il commutatif ?)

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&5\\1&0\end{pmatrix}$

1. Vérifier si les produits $A\times B$ et $B\times A$ sont égaux ou pas. Détailler les calculs.

2. Le produit de matrices carrées est-il commutatif ?

4.1.b Autres propriétés du produit

Exercice 4.2 (Associativité)

Sans calculatrice, calculer $(A\times B)\times C$ et $A\times(B\times C)$ avec les matrices A, B, C ci-dessous.

$A=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$

Exercice 4.3 (Particularités de produits de matrices)

On considère les matrices : $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$ $\quad D=\begin{pmatrix}6&3\\1&-1\end{pmatrix}$

1. Calculer sans détailler les produits : $A\times B$, $A\times C$, $A\times D$. On peut utiliser la calculatrice.

2. a) Que constate-t-on pour $A\times B$.

b) Peut-on avoir une telle situation pour deux nombres a et b ?

3. a) Que constate-t-on pour $A\times C$ et $A\times D$?

b) Peut-on avoir une telle situation pour trois nombres a, c, d ?

Exercice 4.4 (Particularités de puissances de matrices)

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. **a)** Calculer A^2 à la calculatrice.

b) Déterminer A^n pour $n \geqslant 3$.

2. **a)** Calculer B^5 à la calculatrice.

b) Que peut-on en déduire pour B^6 ?

4.2 Matrice identité

Exercice 4.5

On considère les matrices : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1. Effectuer les calculs suivants $I \times A$, $A \times I$, $I \times X$.

2. Que constate-t-on ?

4.3 Distributivité

Exercice 4.6

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $B = I + N$.

1. Calculer à la calculatrice AN et N^2.

2. Sans calculatrice, calculer $A \times B$ en développant $A \times (I + N)$.

3. Sans calculatrice, calculer B^2 en développant $(I + N)^2$.

Exercice 4.7

On considère les matrices : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la matrice $F = D + E$.

1. Calculer les matrices D^2, E^2, $D \times E$, $E \times D$.

2. Sans calculatrice, calculer la matrice F^2 en développant $(D + E)^2$.

Exercice 4.8

A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a)** Calculer en détaillant les matrices A^2 et A^3.

b) Conjecturer l'expression de la matrice A^n, où n est un entier naturel.

c) Démontrer cette conjecture par récurrence.

2. On décompose la matrice A sous la forme $A = I + B$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Écrire A^n en fonction de I et B.

b) Redémontrer l'hérédité dans la démonstration par récurrence en utilisant cette expression.

4.4 Matrice inversible

Exercice 4.9

Résoudre le système d'équations ci-dessous. On donnera les valeurs exactes des solutions.

$$\begin{cases} 2\,x + 5\,y = 3 \\ x \quad + 4\,y = 1 \end{cases}$$

Exercice 4.10

A est la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et I est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice A est inversible s'il existe une matrice $E = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $A \times E = I$.

1. L'égalité $A \times E = I$ s'écrit sous la forme de quatre équations d'inconnues x, y, z, t. Écrire ces quatre équations.
2. Dans ces quatre équations, il y a deux équations d'inconnues x et z.
   Résoudre le système formé par ces deux équations c'est à dire écrire x, puis z en fonction de a, b, c, d.
   Pour éliminer z, choisir une combinaison linéaire des deux équations, même chose pour éliminer x.
3. Résoudre le système formé par les deux équations d'inconnues y et t.
4. Écrire la matrice E en fonction de a, b, c, d.
5. À quelle condition sur a, b, c, d la matrice E existe-t-elle ?

Exercice 4.11

1. Pour chacune des matrices ci-dessous, vérifier si la matrice est inversible, et si c'est bien le cas, calculer son inverse. Utiliser des valeurs exactes.
   $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.
2. On admet que la matrice D ci-dessous est inversible. Déterminer son inverse D^{-1} à la calculatrice.
   $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.12 (Résoudre un système avec des matrices)

1. Écrire le système de l'exercice 4.9 sous la forme d'une égalité matricielle $AX = B$.
2. Justifier que : $X = A^{-1}B$.
3. Sans calculatrice, calculer la matrice A^{-1}.
4. Sans calculatrice, calculer la matrice $X = A^{-1}B$. On retrouve alors les solutions trouvées précédemment.

Exercice 4.13

Résoudre le système ci-dessous par un calcul matriciel.

Détailler les étapes **1. 3. 4.** données dans l'exercice 4.12, en utilisant la calculatrice.

$$\begin{cases} x \quad + 2\,y \qquad = 5 \\ 3x \qquad\quad - z = 0 \\ x \quad + 4\,y \qquad = 7 \end{cases}$$

4.5 Cas particulier des matrices diagonales

Exercice 4.14 (Cas particulier des matrices diagonales)

Une matrice diagonale est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, etc.

On considère les matrices diagonales $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices $A \times B$, $B \times A$.

2. Calculer les matrices A^2 et A^3.

3. Écrire la matrice A^n en fonction de n.

4. Sachant que $A \times A^{-1} = I$, calculer la matrice A^{-1} (valeurs exactes).

4.6 Diagonalisation d'une matrice

Exercice 4.15

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} -2 & 20 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer la matrice P^{-1}.

2. Vérifier que $PDP^{-1} = A$. On dit que la matrice A est diagonalisable.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Calculer l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 4.16

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7,5 & 3,5 \end{pmatrix}$

1. La suite de matrices colonnes (U_n) est définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.

a) Calculer U_1.

b) Exprimer U_n en fonction de A^n.

2. On introduit les matrices suivantes : $D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

a) Vérifier que la matrice P est inversible et calculer la matrice P^{-1}.

b) Vérifier que $PDP^{-1} = A$.

c) On admet que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$. Calculer l'expression de A^n en fonction de n.

3. Calculer U_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4.7 Pour réviser

Chapitre du livre n° 4 – Matrices

Les exercices résolus

- ex 5 p 105 : inverse d'une matrice carrée $(2\,;\,2)$
- ex 6 p 105 : résolution d'un système d'équations
- ex 9 p 111 : puissance d'une matrice A, matrice A^n en fonction de n.

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 157

- ex 7 p 105 : matrices inverses
- ex 10 p 111 : puissance d'une matrice

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 159

- ex 48 p 116 : QCM
- ex 49 p 116 : Vrai/Faux

II Cours

4.1 Propriétés des opérations

Propriété 4.1

Pour deux matrices carrées A et B de format $(n\ ;\ n)$ et pour un réel λ,
les matrices $A+B$, λA, et $A \times B$ sont des matrices carrées de format $(n\ ;\ n)$.

Propriété 4.2 (Addition des matrices)

- L'addition de matrices de même format est commutative, c'est à dire que pour deux matrices A et B de même format $(n\ ;\ p)$, on a : $A+B=B+A$.
- L'addition de matrices de même format est associative, c'est à dire que pour trois matrices A, B, C de même format $(n\ ;\ p)$, on a : $(A+B)+C=A+(B+C)$.
- Pour trois matrices A, B, C de même format $(n\ ;\ p)$, si $A+B=A+C$, alors $B=C$.

Remarque : l'addition des matrices a donc les mêmes propriétés que l'addition des nombres.

Propriété 4.3 (Particularités de la multiplication)

- La multiplication de matrices carrées n'est pas commutative, c'est à dire qu'il existe des matrices A et B de format $(n\ ;\ n)$ telles que $A \times B \neq B \times A$.
- La multiplication des matrices carrées est associative, c'est à dire que pour toutes matrices carrées A, B, C de format $(n\ ;\ n)$ on a : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- La multiplication des matrices carrées est distributive par rapport à l'addition, c'est à dire que pour toutes matrices carrées A, B, C de format $(n\ ;\ n)$ on a : $A \times (B+C) = A \times B + A \times C$.
- Il existe des matrices A, B de format $(n\ ;\ n)$ telles que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $A \times B = 0$.
- Il existe des matrices A, B, C de format $(n\ ;\ n)$ telles que $B \neq C$ et $A \times B = A \times C$.

Remarque

Rappelons que la multiplication des nombres a les propriétés suivantes :
- commutativité ;
- associativité ;
- distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ;
- pour tous réels a et b, si $a \times b = 0$, alors $a=0$ ou $b=0$;
- pour tout réel $a \neq 0$, si $a \times b = a \times c$, alors $b=c$.

Les seules propriétés que l'on retrouve pour la multiplication des matrices sont donc l'associativité et la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Définition 4.1 (La matrice identité)

- Au format $(2\ ;\ 2)$, la matrice identité est la matrice $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Au format $(3\ ;\ 3)$, la matrice identité est la matrice $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 4.4

- Pour toute matrice carrée A de format $(n\ ;\ n)$, on a l'égalité : $A \times I_n = I_n \times A$.
- Pour toute matrice colonne X de format $(n\ ;\ 1)$, on a l'égalité : $I_n \times X = X$.

Propriété 4.5

Pour toute matrice carrée A de format $(n\ ;\ n)$, on a l'égalité : $A^0 = I_n$.

4.2 Matrice carrée inversible

4.2.a Définitions et propriétés

Définition 4.2

Dire qu'une matrice carrée A de format $(n\ ;\ n)$ est inversible signifie qu'il existe une matrice carrée A' de format $(n\ ;\ n)$ telle que $A' \times A = I_n$ et $A \times A' = I_n$.

Propriété 4.6

Si une matrice carrée A est inversible, alors la matrice A' telle que $A' \times A = A \times A' = I_n$ est unique.

Définition 4.3

Si une matrice carrée A est inversible, alors la matrice A' telle que $A' \times A = A \times A' = I_n$ est appelée la matrice inverse de la matrice A, et on la note A^{-1}.

Propriété 4.7

La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Propriété 4.8

Pour une matrice inversible $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sa matrice inverse est : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Définition : pour la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ l'expression $ad - bc$ s'appelle le déterminant de la matrice A et on le note $\det(A)$.

Remarques

- On peut aussi calculer le déterminant d'une matrice de format $(3\ ;\ 3)$ ou d'un format supérieur, mais cela ne fait pas partie du programme de spécialité mathématiques, les formules de calculs sont plus complexes.
- Il en est de même pour le calcul de la matrice inverse d'une matrice inversible de format $(3\ ;\ 3)$ ou d'un format supérieur.
- Par conséquent le calcul de l'inverse d'une matrice inversible de format $(3\ ;\ 3)$ sera effectué à la calculatrice.

4.2.b Résolution d'un système avec une matrice inverse

Rappel : système d'équations sous forme matricielle

Un système de n équations du premier degré à n inconnues peut d'écrire sous la forme de l'égalité matricielle $AX = B$, où

- la matrice A est carrée au format $(n\ ;\ n)$;
- la matrice X est une matrice colonne au format $(n\ ;\ 1)$, et contient les inconnues ;
- la matrice B est une matrice colonne au format $(n\ ;\ 1)$.

Résolution du système

On calcule la matrice X de la manière suivante :

on a : $AX = B$ donc : $A^{-1} \times AX = A^{-1} \times B$ c'est à dire $I_nX = A^{-1}B$ autrement dit $X = A^{-1}B$.

Méthode

Pour résoudre un système de n équations du premier degré à n inconnues, on peut :
- écrire ce système sous la forme matricielle $AX = B$;
- calculer la matrice A^{-1} ;
- calculer les solutions avec l'égalité : $X = A^{-1}B$.

4.3 Cas particulier des matrices diagonales

Définition 4.4

Une matrice diagonale est une matrice carrée de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Propriété 4.9

Pour deux matrices diagonales A et B de format $(n \ ; \ n)$ et pour un réel λ,
les matrices $A + B$, λA, $A \times B$ sont des matrices diagonales de format $(n \ ; \ n)$.

Détail des opérations pour les matrices de format $(2 \ ; \ 2)$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times c & 0 \\ 0 & b \times d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

Propriété 4.10

Le produit de deux matrices diagonales est commutatif.

Propriété 4.11

Une matrice diagonale est inversible si tous les coefficients de sa diagonale sont non nuls.

Propriété 4.12

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$

Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

etc.

4.4 Diagonalisation d'une matrice

Propriété 4.13

Dire qu'une matrice A est diagonalisable signifie qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Propriété 4.14

Si une matrice A est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$ alors pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.