Chapitre 12

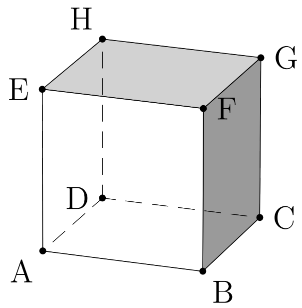
Repères de l'espace

I Exercices

12.1 Vecteurs de l'espace

Exercice 12.1

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.

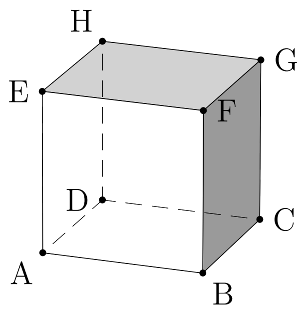


1. **a)** Sur la figure ci-contre, construire le point I tel que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{HE}$.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $EHBI$?
2. Construire le point J tel que $AGJE$ soit un parallélogramme.

Exercice 12.2

ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous.

On admettra les égalités de vecteurs correspondant aux arêtes, comme par exemple :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$



1. Compléter :
   $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AE} + \ldots = \overrightarrow{A\ldots}$
   $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BD} = \ldots + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{\ldots D}$
   $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CH} + \ldots = \overrightarrow{C\ldots}$
   $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AF} = \ldots + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{\ldots F}$
2. Construire les points I, J, K tel que
   $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EI}$ $\qquad \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GJ}$ $\qquad \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FK}$

Exercice 12.3

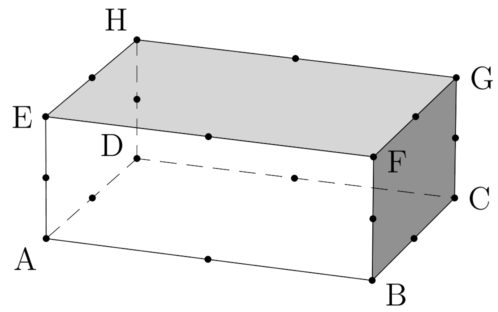
ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous. Les milieux de toutes les arêtes ont été marqués.

Construire les points I, J, K tel que

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



12.2 Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires.

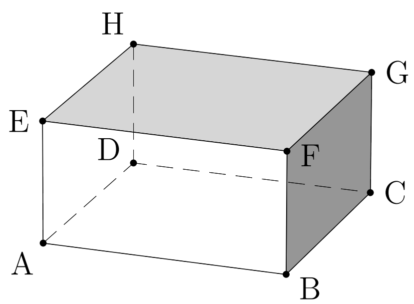
Exercice 12.4

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre. ci-dessous

1. Construire les points I, J, K, L tel que

   $\overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EG}$ $\quad$ $\overrightarrow{EJ} = -3\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EG}$ $\quad$ $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EG}$ $\quad$ $\overrightarrow{EL} = -\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{EG}$

2. Où se trouvent tous les points M tel que $\overrightarrow{EM}$ s'écrit sous la forme $x\overrightarrow{EH} + y\overrightarrow{EG}$?



Exercice 12.5

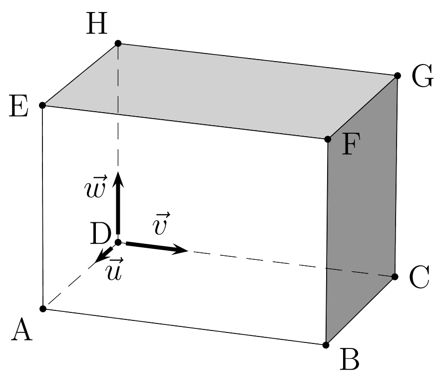
ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont respectivement colinéaires aux vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$ et sont représentés sur la figure.

Quelle est chaque fois le plan défini par le point et les deux vecteurs indiqués ? On nommera chaque plan par trois points.

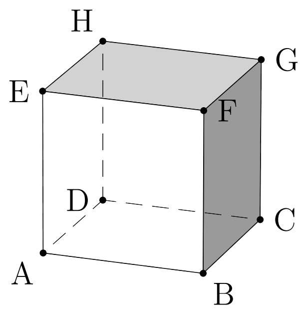
1. H, $\vec{u}$, $\vec{v}$ **2.** C, $\vec{u}$, $\vec{w}$ **3.** A, $\vec{v}$, $\vec{w}$

4. H, $\vec{u}$, $\vec{w}$ **5.** B, $\vec{v}$, $\vec{w}$ **6.** B, $\vec{u}$, $\vec{v}$



Exercice 12.6

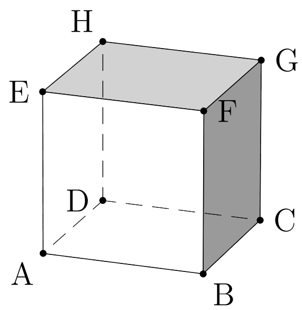
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



1. Construire le point I tel que :
   $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
2. Le point I appartient-il au plan (ABH) ? Justifier.
   On pourra calculer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$.

Exercice 12.7

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.



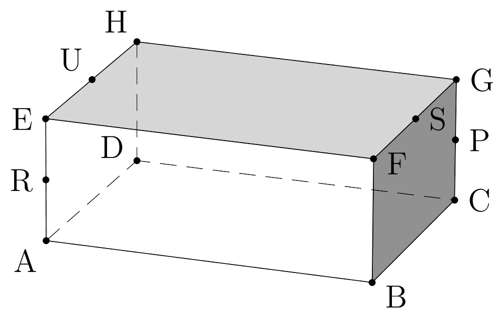
1. Construire le point I tel que :
   $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
2. Démontrer que : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$
3. Le point I appartient-il au plan (BCE) ? Justifier.
   On pourra calculer le vecteur $\overrightarrow{BI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$.

12.3 Vecteurs coplanaires

Exercice 12.8

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.

R, P, S, U sont les milieux respectifs des arêtes [AE], [CG], [FG], [EH].



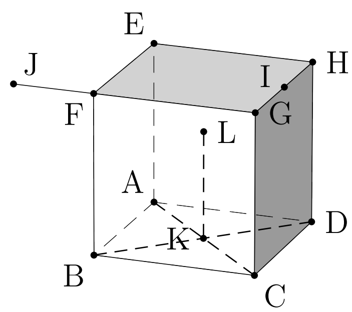
1. Indiquer chaque fois sans justifier si les trois vecteurs sont coplanaires ou non.
   a) $\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AD}$ **b)** $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{BC}$
   c) $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AU}$ **d)** $\overrightarrow{GE}$; $\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{GR}$
   e) $\overrightarrow{FP}$; $\overrightarrow{FS}$; $\overrightarrow{FB}$
2. Dans chaque cas où les vecteurs sont coplanaires, écrire l'un des trois en fonction des deux autres.

Exercice 12.9

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I, J, K, L sont les points tels que :

- I est le milieu de l'arête $[GH]$;
- $\overrightarrow{FJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$;
- K est le centre du carré $ABCD$;
- $\overrightarrow{KL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.



Écrire chacun des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

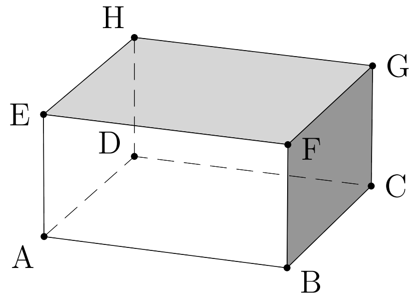
Exercice 12.10

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.

1. Construire les points I et J tel que

   $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}$

   $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
2. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. Les points C, I, J sont-ils alignés ? Démontrer sa réponse.



12.4 Repérage dans l'espace

***COURS :** lire la définition d'un repère de l'espace et le vocabulaire des coordonnées au paragraphe 12.4.*

Exercice 12.11

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté page suivante.

On donne les mesures suivantes : $AB = 4$, $AD = 6$, $AE = 2$

On précise
- que les milieux de toutes les arêtes sont marqués ;
- que les points I, G, H, J sont alignés dans cet ordre et que $IG = 3$ et $HJ = 3$;
- que les points G, C, K sont alignés dans cet ordre et que $CK = 1$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont les vecteurs tels que $\vec{u} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{v} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ $\quad \vec{w} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

$(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère de l'espace parce que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont non coplanaires.

Exemple de points et de coordonnées :

$\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}$ donc les coordonnées de B dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $B(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$

$\overrightarrow{AG} = 4\vec{u} + 6\vec{v} + 2\vec{w}$ donc les coordonnées de G dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $G(4\ ;\ 6\ ;\ 2)$

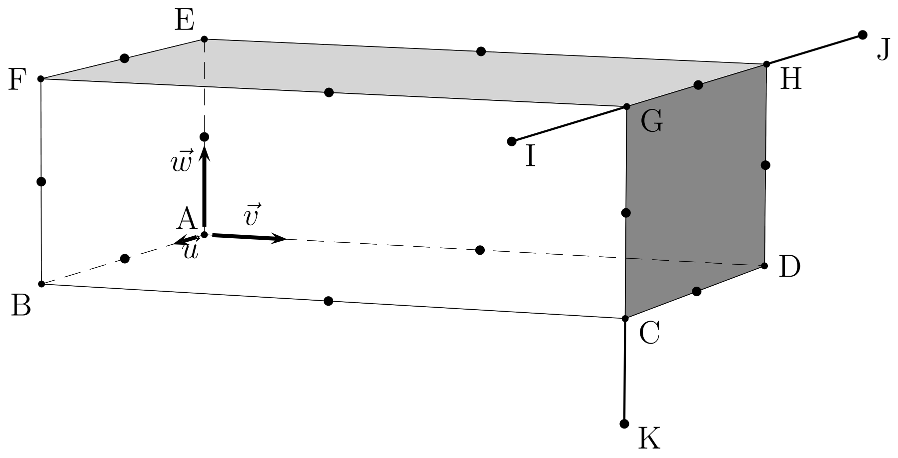
Consignes

1. Dans le repère $(A\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, donner les coordonnées des points D, F, A, I, J, K.
2. Placer les points de coordonnées :

   $L(4\ ;\ 3\ ;\ 0)$ $\quad M(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ $\quad N(2\ ;\ 6\ ;\ 2)$ $\quad P(4\ ;\ 6\ ;\ 1)$ $\quad Q(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$
3. Calculer les coordonnées

   a) du vecteur $\overrightarrow{DF}$ **b)** du vecteur $\overrightarrow{DJ}$ **c)** du vecteur $2\overrightarrow{DF}$

   d) du vecteur $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DJ}$ **e)** de la somme $\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DF}$ **f)** du point R milieu de $[IK]$



Exercice 12.12

Dans le pavé droit ABCDEFGH de l'exercice 12.11, le point S a pour coordonnées $S(-2\ ;\ -3\ ;\ 3)$ dans le repère $(A\ ;\ \vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points C et E.
2. Les points C, E, S sont-ils alignés ? Justifier par des calculs.

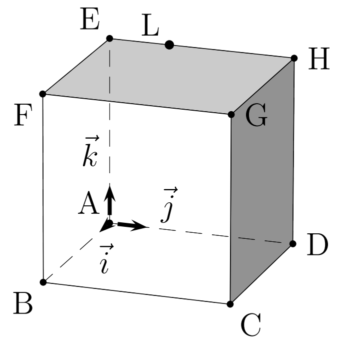
Exercice 12.13

ABCDEFGH est le cube d'arête 4 représenté ci-contre.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont les vecteurs tels que :

$\vec{i} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \vec{j} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD} \quad \vec{k} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

$(A\ ;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère de l'espace.



K est le milieu de l'arête $[FG]$, et M est le milieu de $[CH]$.

L est le point du segment $[EH]$ tel que $EL = 1,3$

Le point P est tel que A, D, P sont alignés dans cet ordre et $DP = 4$.

1. Placer les points K, M, P sur la figure.
2. Sans justifier, donner les coordonnées des points B, C, L, F, G, H, P.
3. Calculer les coordonnées des points K et M.
4. **a)** Les points B, K, L semblent-ils alignés ? (tracer une droite sur la figure)

   b) Déterminer par des calculs si les points B, K, L sont alignés ou non.
5. Mêmes consignes a) et b) pour les points F, M, P.

12.5 Représentation paramétrique d'une droite

Exercice 12.14

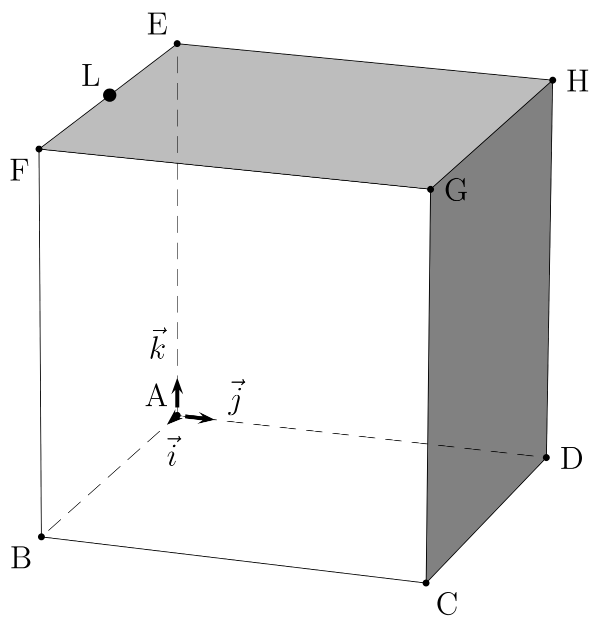
ABCDEFGH est le cube d'arête 8 représenté ci-dessous.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont les vecteurs tels que $\vec{i} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{j} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ $\quad \vec{k} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.

$(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

L est le milieu de l'arête $[EF]$ $\quad \vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\vec{u}(-1\ ;\ 2\ ;\ -2)$

1. Calculer les coordonnées du point L.
2. On considère les points M de l'espace pour lesquels il existe un réel t tel que $\overrightarrow{LM} = t\vec{u}$.
   Quel est le point M
   a) lorsque $t = 0$? **b)** lorsque $t = 4$? Calculer ses coordonnées.
3. Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que $\overrightarrow{LM} = t\vec{u}$ lorsque t parcourt l'ensemble des réels ?
4. Tracer l'ensemble $\mathscr{E}$ sur la figure.
5. On appelle $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées de M. Écrire x, y, z en fonction de t. Le système formé par ces trois égalités est nommé *la représentation paramétrique de l'ensemble* $\mathscr{E}$.



Exercice 12.15

Dans cet exercice, on utilise le cube et le repère de l'exercice 12.14.

1. Quelles sont les coordonnées de C ?
2. Placer le point P milieu de l'arête $[EH]$, et calculer ses coordonnées.
3. **a)** Tracer la droite (CP).
   b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CP).
4. Le point $Q(-8\ ;\ 0\ ;\ 16)$ appartient-il à la droite (CP) ? Justifier par des calculs.
5. Même question pour le point $R(3\ ;\ 6\ ;\ 4)$.

Exercice 12.16

Dans cet exercice, on utilise le cube et le repère de l'exercice 12.14.

La représentation paramétrique d'une droite (Δ) est : $\begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$

1. Donner les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite.
2. Calculer les coordonnées du point de cette droite tel que $t = 4$. Quel est ce point ?
3. Tracer la droite (Δ).

Exercice 12.17

$(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace. Donner une représentation paramétrique de chaque axe du repère : (Ox), (Oy), (Oz).

Exercice 12.18

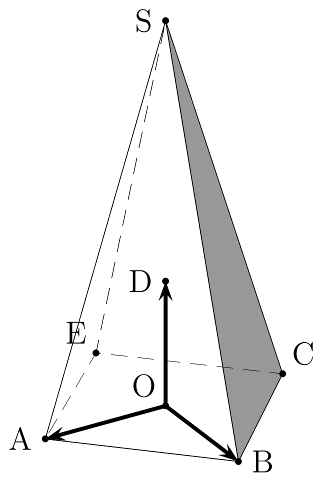
La représentation paramétrique d'une droite (d) est : $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -9t \\ z = -2 + 15t \end{cases}$

1. a) Le point B de coordonnées $B(-3\ ;\ 6\ ;\ -12)$ appartient-il à la droite (d) ? Justifier par des calculs.
   b) Même question pour le point $C(7\ ;\ -8\ ;\ 14)$.
2. a) Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{v}(2\ ;\ -3\ ;\ 7)$ est-il un vecteur directeur de la droite (d) ? Justifier par des calculs.
   b) Même question pour le vecteur $\vec{w}(10\ ;\ -15\ ;\ 25)$
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) différente de celle de l'énoncé.

Exercice 12.19

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O.
Soit D le point de l'espace tel que $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OD}}\right)$ soit un repère orthonormé.
Le point S a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,3)$ dans ce repère.

1. Quelle est l'intersection des plans AES et BCS ? Justifier.
2. Tracer cet ensemble sur la figure ci-contre.
3. En déduire une représentation paramétrique de cet ensemble.



12.6 Représentation paramétrique d'un plan

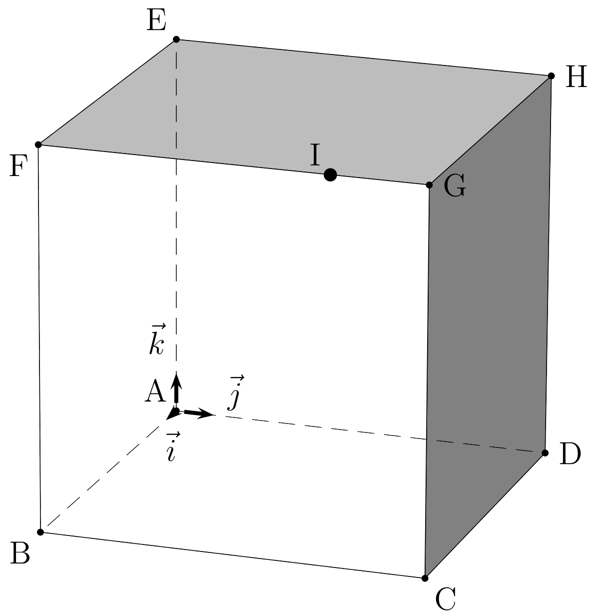
Exercice 12.20

ABCDEFGH est le cube d'arête 8 représenté ci-contre comme dans l'exercice 12.14.
I est le point de coordonnées $I\ (8\ ;\ 6\ ;\ 8)$.

1. Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de l'espace pour lesquels il existe des réels t et t' tel que $\overrightarrow{CM} = t\ \overrightarrow{CD} + t'\ \overrightarrow{CI}$?

2. On appelle $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées de M. Écrire x, y, z en fonction de t et t'.

Le système formé par ces trois égalités est nommé *la représentation paramétrique de l'ensemble* $\mathscr{E}$.



Exercice 12.21

1. Sur la figure de l'exercice 12.20, placer le point $J\ (8\ ;\ 2\ ;\ 8)$.

2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABJ).

Exercice 12.22

ABCDEFGH est le cube d'arête 8 représenté ci-contre comme dans les exercices précédents.

La représentation paramétrique d'un plan $(\mathscr{P})$ est : $\begin{cases} x = 8 - 2t' \\ y = 8 - t \\ z = 2t + 2t' \end{cases}$

1. Donner les coordonnées d'un point et de deux vecteurs directeurs de ce plan.

2. Calculer les coordonnées du point L de cette droite tel que $t = 4$ et $t' = 0$.

Placer le point L sur la figure.

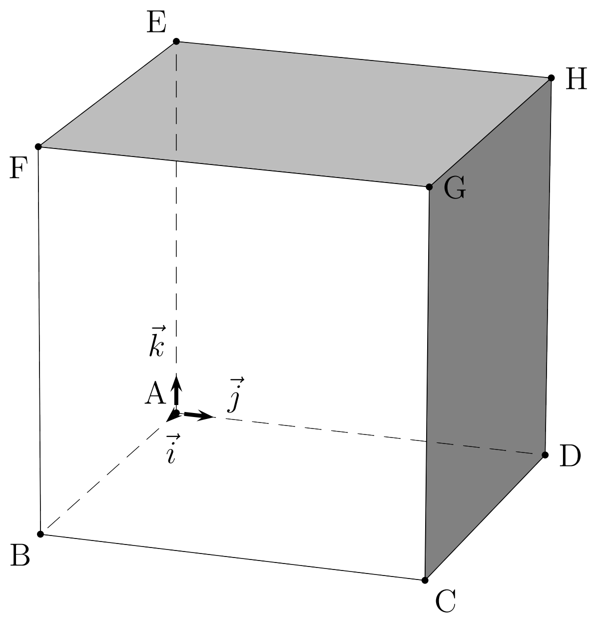
3. Calculer les coordonnées du point de cette droite tel que $t = 0$ et $t' = 4$.

Quel est ce point ?

4. Quel est le plan $(\mathscr{P})$?

Répondre en le nommant par trois points.

5. Tracer la section du cube par le plan $(\mathscr{P})$.



12.7 Positions relatives de droites

Exercice 12.23

1. Pour deux droites dans l'espace, rappeler quelles sont les différentes positions relatives possibles de ces deux droites.
2. Deux droites ont des vecteurs directeurs colinéaires.
   a) Quelles sont les positions relatives possibles de ces deux droites ?
   b) Quelles sont les positions relatives de ces deux droites
      - si ces deux droites ont un point en commun ?
      - si ces deux droites n'ont pas de point en commun ?
3. Deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires.
   a) Quelles sont les positions relatives possibles de ces deux droites ?
   b) Quelles sont les positions relatives de ces deux droites
      - si ces deux droites ont un point en commun ?
      - si ces deux droites n'ont pas de point en commun ?

Exercice 12.24

Des représentations paramétriques des droites (d_1) et (d_2) sont : $(d_1)\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = \quad -t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $\qquad (d_2)\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$

1. **Vecteurs directeurs colinéaires ou non**
   Déterminer un vecteur directeur de chaque droite et vérifier si ces deux vecteurs sont colinéaires ou non.
2. **Point en commun ou non**
   Vérifier si ces deux droites ont un point en commun, pour cela
   a) On écrit le système (S) ci-dessous (on utilise un paramètre différent pour chaque droite).
   $$(S)\begin{cases} 1 + 3t &= 2 - 4t' & (1) \\ -t &= 3 - 2t' & (2) \\ 3 + 2t &= -4 + 5t' & (3) \end{cases}$$
   b) On résout le système formé par deux équations de ce système :
      - s'il n'y a pas de solution, le système (S) n'a pas de solution,
        dans ce cas les deux droites n'ont aucun point en commun ;
      - si on obtient des solutions t et t', on remplace ces solutions dans la 3e équation ;
         - si ces solutions sont aussi solutions de la 3e équation,
           il y a un point commun aux deux droites,
           et on calcule ses coordonnées x, y, z en remplaçant t ou t' par sa valeur ;
         - sinon les deux droites n'ont aucun point en commun.
3. **Conclusion**
   Quelles sont les positions relatives des droites (d_1) et (d_2) ?

Exercice 12.25

On considère les droites (d_1) et (d_2) de l'exercice 12.24 et les droites (d_3) et (d_4) dont des représentations paramétriques sont :

$$(d_3)\begin{cases} x = 6t \\ y = 2-2t \\ z = 1+4t \end{cases} \qquad (d_4)\begin{cases} x = 3+t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}$$

Déterminer les positions relatives des droites : **1.** (d_1) et (d_3) **2.** (d_2) et (d_4)

On procédera comme dans l'exercice 12.24 c'est à dire

- vérifier si les vecteurs directeurs sont colinéaires ;
- vérifier si les droites ont un point en commun ou non ;
- conclure.

Exercice 12.26

Récapituler les résultats des exercices 12.24 et 12.25 en complétant chaque case des rangées (1) à (5) par OUI ou NON.

Pour l'intersection, sur la rangée (6), on indiquera s'il s'agit d'une droite, d'un point, ou si l'intersection est vide ($\varnothing$).

		(d_1) et (d_2)	(d_1) et (d_3)	(d_2) et (d_4)
(1)	Confondues ?			
(2)	Strictement parallèles ?			
(3)	Sécantes ?			
(4)	Coplanaires ?			
(5)	Non coplanaires ?			
(6)	Intersection ?			

12.8 Pour réviser

Chapitre 11 – Géométrie vectorielle

Les exercices résolus

- ex 1 p 295 : tétraèdre, calcul vectoriel, centre de gravité d'un triangle.
- ex 8 p 297 : calcul vectoriel, justifier qu'un point appartient à un plan.
- ex 9 p 297 : démonstration du théorème du toit.
- ex 12 p 299 : démontrer que des vecteurs sont coplanaires.
- ex 17 p 301 : coordonnées, droites parallèles.
- ex 18 p 301 : écrire une représentation paramétrique d'une droite.

Rubrique ***Pour s'exercer***, corrigés page 468

- ex 3 p 295 : calcul vectoriel dans une pyramide.
- ex 10 p 297 : relation de Chasles, vecteurs, droites dans un cube.
- ex 11 p 297 : calcul vectoriel, droites et plans parallèles.
- ex 13 p 299 : démontrer que des vecteurs sont coplanaires.
- ex 19 p 301 : représentation paramétrique d'une droite

Rubrique ***Objectif bac***, corrigés page 477-478

- ex 77 p 307 : QCM
- ex 78 p 307 : Vrai/Faux
- ex 79 p 307 : Vrai/Faux
- ex 80 p 308 : problème de type bac, représentations paramétriques de droites et de plans.
- ex 81 p 309 : pyramide, centre de gravité d'un triangle, points coplanaires, points alignés.
- ex 82 p 309 : alignement, représentations paramétriques d'un plan.

II Cours

12.1 Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées.

12.1.a Définition et vecteurs égaux

Définition 12.1

Pour deux points A en B de l'espace,
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B ;
- lorsque A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul.

Propriété 12.1 (Vecteurs égaux et parallélogramme)

Pour quatre points A, B, C, D de l'espace,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

12.1.b Somme de deux vecteurs.

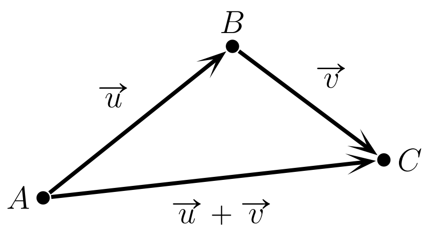
Propriété 12.2 (Relation de Chasles)

Pour trois points A, B, C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

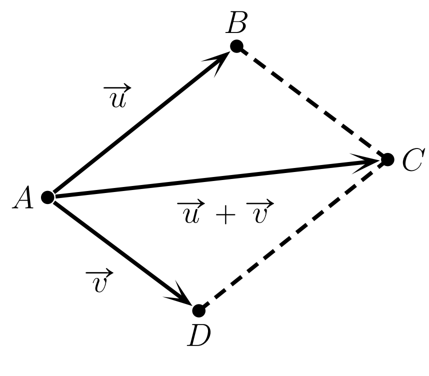
Propriété 12.3 (Règle du parallélogramme)

Pour quatre points A, B, C, D de l'espace, la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ est égale au vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Relation de Chasles



Règle du pararallélogramme



12.1.c Produit d'un vecteur par un nombre réel

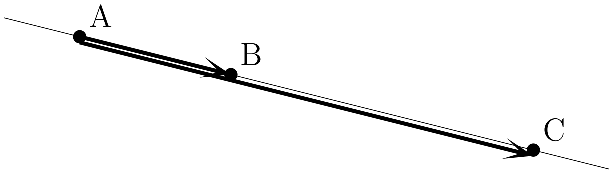
Remarque : si k est positif $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de même sens ; si k est négatif $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de sens opposés.

Définition 12.2 (Vecteurs colinéaires)

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou qu'il existe un nombre k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$

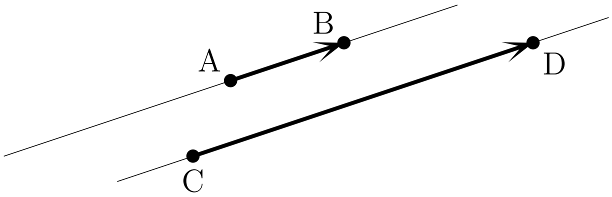
Propriété 12.4 (Alignement et parallélisme)

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Propriété 12.5

Pour quatre points A, B, C, D, les droites (AB) et (CD) sont parallèles
si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



12.1.d Propriétés des opérations

Propriété 12.6

- Pour tout réel λ et pour tout vecteur $\vec{u}$: $\lambda\vec{u} = \vec{0}$. si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = 0$
- Pour tout vecteur $\vec{u}$: $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.
- Pour tous réels λ et λ' et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
  $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ $\quad (\lambda + \lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$ $\quad \lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$

12.2 Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété 12.7

Pour un point A de l'espace et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on considère les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.
Alors l'ensemble des points M pour lesquels il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ est le plan (ABC).

Définition 12.3

Avec les notations de la propriété précédente, le plan (ABC) est appelé le plan défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 12.4 (Vecteurs directeurs d'un plan)

Lorsqu'un plan est défini par le point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de ce plan, ou que ce plan est dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriété 12.8

Des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Propriété 12.9 (Théorème du toit)

Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite (Δ), et si (d) et (d') sont deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$,
alors la droite (Δ) est parallèle à (d) et à (d').

Démonstration

Le programme de mathématiques de terminale S indique qu'il est intéressant de présenter la démonstration du théorème du toit.

Nommons $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite (Δ), et $\vec{v}$ un vecteur directeur commun aux droites parallèles (d) et (d').

Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et démontrons que c'est impossible.

Ce type de démonstration s'appelle une *démonstration par l'absurde.*

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des droites (Δ) et (d) qui sont contenues dans le plan $\mathscr{P}$, et comme on a supposé que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ils sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$.

De même les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}'$.

Mais d'après la propriété précédente, deux plans sont dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles, donc les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

Comme cela est en contradiction avec le fait que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ soient sécants, cela implique que la supposition « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires » est fausse.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc la droite (Δ) est parallèle à (d) et à (d').

12.3 Vecteurs coplanaires.

Définition 12.5

Dire que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que les points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$ sont coplanaires.

Dire que les points A, B, C, D sont coplanaires signifie que le point D appartient au plan (ABC), autrement dit, d'après la propriété 12.7 il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\vec{u} + b\vec{v}$, c'est à dire tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

On dit que le vecteur $\vec{w}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On a donc la définition et la propriété ci-dessous.

Définition 12.6 (Combinaison linéaire de vecteurs)

On dit que le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
si et seulement si il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Propriété 12.10

Trois vecteurs sont coplanaires si, et seulement si, l'un des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

Propriété 12.11 (Décomposition d'un vecteur en fonction de 3 vecteurs non coplanaires)

Pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, et pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

12.4 Repérage dans l'espace

Définition 12.7 (Repère de l'espace)

Un repère de l'espace est formé d'un point O et de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires. On le note : $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On sait d'après la propriété du paragraphe 12.3 que pour tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. On utilise alors le vocabulaire indiqué ci-dessous.

Définition 12.8 (Coordonnées, abscisse, ordonnée, cote)

- Pour un point M tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$
  x, y, z sont les coordonnées du point M dans le repère $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
  x, y, z sont nommés respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote du point M.
- Pour un vecteur $\vec{t}$ tel que $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, on utilise le même vocabulaire : coordonnées, abscisse, ordonnée, cote du vecteur $\vec{t}$.

Calculs sur les coordonnées

On retrouve les mêmes règles de calculs que dans le plan, avec trois coordonnées au lieu de deux.

La norme d'un vecteur $\vec{u}$ et la distance AB n'apparaissent pas dans les formules ci-dessous et seront abordées dans le chapitre *Produit scalaire dans l'espace*.

Propriété 12.12

- Pour deux vecteurs $\vec{u}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$,
  - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\ ;\ y + y'\ ;\ z + z')$;
  - le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}(\lambda x\ ;\ \lambda y\ ;\ \lambda z)$.
- Pour deux points $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$,
  - le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$;
  - le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Propriété 12.13 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\vec{v}(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$ et $yz' - y'z = 0$.

Méthode pour vérifier si deux vecteurs à trois coordonnées sont colinéaires

Utiliser la définition de vecteurs colinéaires

On sait que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Par exemple pour les vecteurs $\vec{u}(-1\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et $\vec{v}(-2\ ;\ 6\ ;\ 10)$, on voit facilement que $\vec{v} = 2\vec{u}$, par conséquent ces deux vecteurs sont colinéaires.

Utiliser la propriété 12.13

$$\begin{array}{ll} \vec{u} & (x\ ;\ y\ ;\ z) \\ \vec{v} & (x'\ ;\ y'\ ;\ z') \end{array}$$

On calcule $xy' - x'y$ et $yz' - y'z$.

- Si les deux résultats sont nuls, les deux vecteurs sont colinéaires.

- Sinon, c'est à dire si un ou deux résultats sont non nuls, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Par exemple cette méthode est plus pratique dans le cas suivant où on ne détermine pas de manière évidente un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$$\begin{array}{lccccc} \vec{u} & (& 4 & ; & -6 & ; & 10) \\ \vec{v} & (& -10 & ; & 15 & ; & -25) \end{array}$$

Calculs : $4 \times 15 - (-10) \times (-6) = 0$ $\quad (-6) \times (-25) - 15 \times 10 = 0$

Donc ces deux vecteurs sont colinéaires.

12.5 Représentation paramétrique d'une droite.

Dans un repère de l'espace, un point A a pour coordonnées $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

Dire qu'un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite passant par le point A de vecteur directeur $\vec{u}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires autrement dit il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

On a donc le système : $\left\{\begin{array}{l} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{array}\right.$ et cela équivaut à : $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{array}\right.$

D'où la définition ci-dessous.

Définition 12.9

Un point A et un vecteur $\vec{u}$ ont pour coordonnées $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ dans un repère de l'espace.

On appelle représentation paramétrique de la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ le système suivant : $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right.$

Méthode : comment vérifier si un point appartient à une droite de représentation paramétrique donnée

On veut savoir si un point $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ appartient ou non à la droite (d) de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{array}\right.$

1re méthode

Le point B appartient à la droite (d) si et seulement si il existe un téel t tel que $\left\{\begin{array}{ll} x_B = x_A + at & (1) \\ y_B = y_A + bt & (2) \\ z_B = z_A + ct & (3) \end{array}\right.$

On résout alors l'équation (1) d'inconnue t, puis on vérifie si la solution obtenue est aussi solution des équations (2) et (3).

Si la solution de l'équation (1) est aussi solution des équations (2) et (3), alors le point B appartient bien à la droite (d), sinon le point B n'appartient pas à la droite (d).

2e méthode

La droite (d) passe par le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et le vecteur $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est un vecteur directeur de la droite (d), par conséquent le point B appartient si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ sont colinéaires.

On vérifie donc si ces vecteurs sont colinéaires ou non.

Méthode : comment vérifier si un vecteur est un vecteur directeur d'une droite de représentation paramétrique donnée

On veut savoir si un vecteur $\vec{v}(a' \,;\, b' \,;\, c')$ est un vecteur directeur de la droite (d) de représentation paramétrique : $(d) \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Le vecteur $\vec{v}(a' \,;\, b' \,;\, c')$ est un vecteur directeur de la droite (d) si et seulement si les vecteurs $\vec{v}(a' \,;\, b' \,;\, c')$ et $\vec{u}(a \,;\, b \,;\, c)$ sont colinéaires.

On vérifie donc si ces vecteurs sont colinéaires ou non.

12.6 Représentation paramétrique d'un plan.

Dans un repère de l'espace, un point A a pour coordonnées $A(x_A \,;\, y_A \,;\, z_A)$ et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}(a \,;\, b \,;\, c)$ et $\vec{v}(a' \,;\, b' \,;\, c')$.

On appelle $\mathscr{P}$ le plan défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dire qu'un point $M(x \,;\, y \,;\, z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ signifie qu'il existe des réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$.

On a donc le système : $\begin{cases} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \\ z - z_A = tc + t'c' \end{cases}$ et cela équivaut à : $\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$

D'où la définition ci-dessous.

Définition 12.10

Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $A(x_A \,;\, y_A \,;\, z_A)$, $\vec{u}(a \,;\, b \,;\, c)$, $\vec{v}(a' \,;\, b' \,;\, c')$ dans un repère de l'espace.
On appelle représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$ défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le système suivant : $\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}$