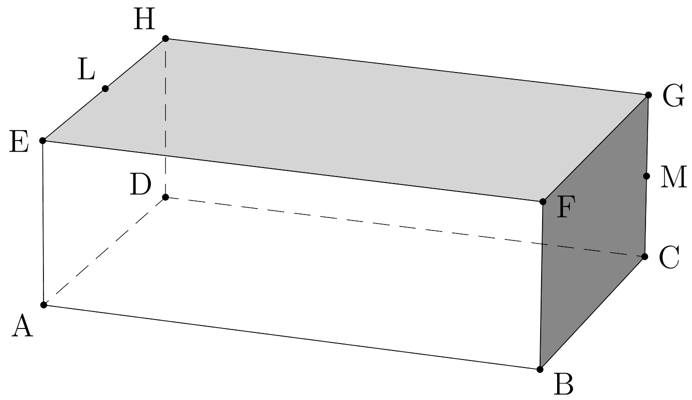
Chapitre 14

Produit scalaire dans l'espace

I Exercices

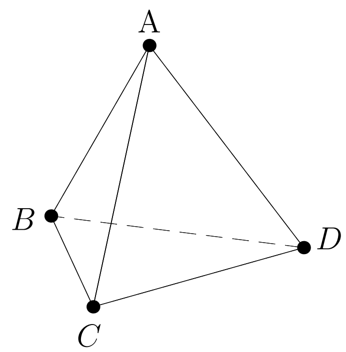
14.1 Définitions et propriétés

Exercice 14.1
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 6$, $AD = 4$, $AE = 2$. Les points L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$ et $[CG]$.
Déterminer une mesure en degrés de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{AL}\ ;\ \overrightarrow{AM})$.



Exercice 14.2
$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête 5 cm.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.
2. Le point E est le milieu de $[CD]$.
   Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EC}$.



Exercice 14.3

On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ de l'exercice 14.1

Les droites (BF) et (EG) sont-elles orthogonales ? Justifier.

14.2 Vecteur normal à un plan

Exercice 14.4

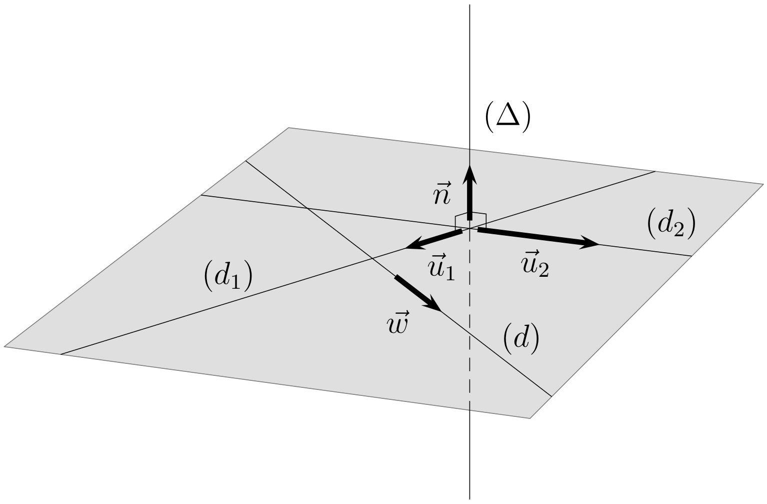
Le but des questions qui suivent est de démontrer que si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors cette droite est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Cette propriété avait déjà été étudiée dans un chapitre précédent mais n'avait pas été démontrée.

Considérons une droite (Δ) orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) d'un plan (P).

Soit $\vec{n}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs respectifs de (Δ), (d_1), (d_2).

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.
2. Soit (d) une droite quelconque du plan (P) et $\vec{w}$ un de ses vecteurs directeurs.
   - a) Quel est le lien entre les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$? Écrire une égalité.
   - b) Démontrer que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
   - c) Conclure.



Exercice 14.5

Dans un repère orthonormé, les coordonnées de trois points A, B, C, et d'un vecteur $\vec{u}$ sont : $A(-4\ ;\ -1\ ;\ 1)$ $B(-1\ ;\ 2\ ;\ 2)$ $C(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ $\vec{u}(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$.

1. Vérifier si les points A, B, C définissent bien un plan.
2. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

14.3 Équation cartésienne d'un plan

Exercice 14.6

Dans un repère orthonormé, les coordonnées d'un point A, et d'un vecteur $\vec{n}$ sont :

$A(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$ $\vec{n}(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$.

(P) est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Soit M un point du plan (P) de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.

Démontrer que x, y, z vérifient une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Exercice 14.7

Dans un repère orthonormé, les coordonnées d'un points A, et d'un vecteur $\vec{n}$ sont :

$A(-5\ ;\ 1\ ;\ -3)$ $\quad \vec{n}(2\ ;\ 4\ ;\ -1)$.

Calculer une équation cartésienne du plan (P) passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice 14.8

Une équation cartésienne d'un plan (P) dans un repère orthonormé de l'espace est donnée par : $5x - y + 2z - 10 = 0$.

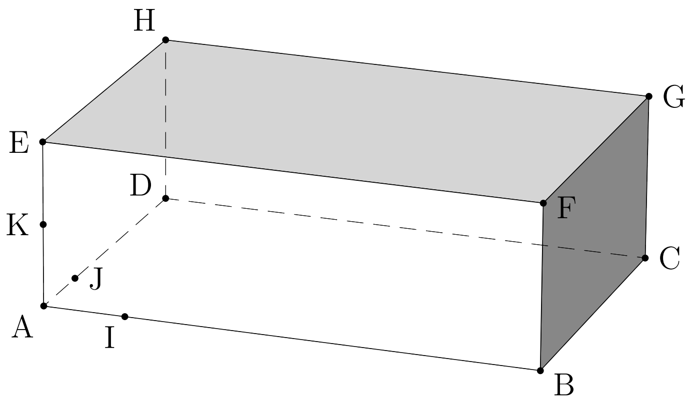
Déterminer les coordonnées d'un point A du plan (P) et d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P).

Exercice 14.9

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ de l'exercice 14.1, tel que $AB = 6$, $AD = 4$, $AE = 2$.

Les points I, J, K appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[AE]$ et sont tels que $AI = AJ = AK = 1$.

Donner sans justifier une équation cartésienne de chacun des plans des faces du pavé droit $ABCDEFGH$ dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{AJ},\ \overrightarrow{AK})$.



Exercice 14.10

Une équation cartésienne d'un plan (P) est $5x - 3y + z + 7 = 0$.

1. Le point $A(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$ appartient-il au plan (P). Justifier par des calculs.
2. Même question pour $A(4\ ;\ 6\ ;\ -10)$
3. Calculer les coordonnées d'un point C, qui soit différent des points A et B et qui appartienne au plan (P).

14.4 Positions relatives de droites et de plans

Exercice 14.11 (Deux plans)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne des équations cartésiennes des plans (P_1), (P_2), (P_3), (P_4).

$(P_1) : x + 3y - 4z + 7 = 0$ $\qquad (P_2) : -2x - 6y + 8z - 5 = 0$

$(P_3) : 2x + y + 3z + 9 = 0$ $\qquad (P_4) : x + y - z + 4 = 0$

Indiquer en justifiant les positions relatives des plans ci-dessous.

Si deux plans sont sécants, préciser s'ils sont perpendiculaires ou non.

1. (P_1) et (P_2) **2.** (P_1) et (P_3) **3.** (P_3) et (P_4)

Indication : on pourra lire d'abord dans le cours la propriété 14.9 et la définition 14.9.

Exercice 14.12 (Une droite et un plan)

Dans un repère orthonormé de l'espace, une équation cartésienne du plan (P) est $2x-y+3z+13=0$,

et une représentation paramétrique de la droite (d) est $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-5t \\ z = t \end{cases}$

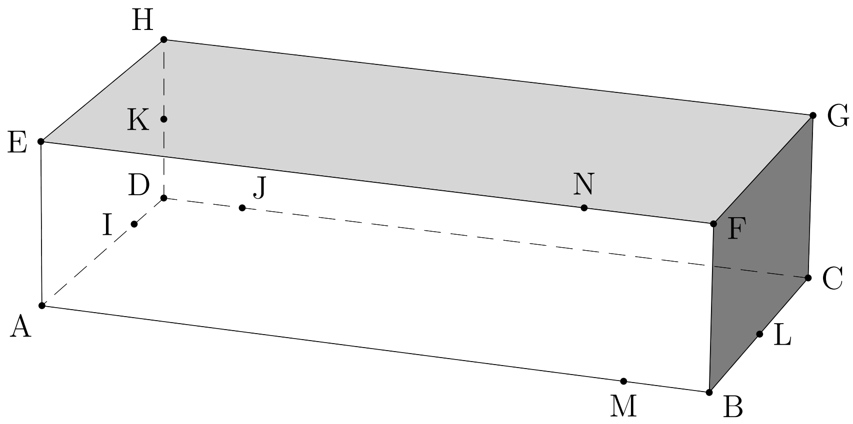
1. Justifier que le plan P et la droite (d) sont sécants.
2. On appelle A le point d'intersection du plan P et de la droite (d). Calculer les coordonnées du point A.

Indication : on pourra lire d'abord dans le cours la méthode 14.4 et l'exercice résolu juste après.

14.5 Exercices de type bac

Exercice 14.13

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB=8$, $AD=4$ et $AE=2$.



I, J et K sont les points tels que : $\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DA}$, $\quad \overrightarrow{DJ} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{DC}$, $\quad \overrightarrow{DK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DH}$.

On se place dans le repère orthonormé $(D\ ;\ \overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DK})$.

L est le milieu de l'arête $[BC]$, M et N sont les points placés respectivement sur les arêtes $[AB]$ et $[EF]$, tels que $AM=7$ et $EN=6,5$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points L, M, N.
2. Justifier que les points M, L, N ne sont pas alignés.
3. Déterminer une mesure en degrés de l'angle $\widehat{LMN}$. Arrondir à l'unité.
4. Calculer le volume du tétraèdre $BLMF$.
5. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (LMN).
6. Déterminer une équation cartésienne du plan (LMN).
7. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).
8. Déterminer les coordonnées du point d'intersection R du plan (LMN) et de la droite (FG).
9. **a)** Quelle est la section du pavé droit $ABCDEFGH$ par le plan (LMN) ?
   b) Tracer cette section sur la figure.
   c) Quelle est la nature de cette section ? Justifier.

Exercice 14.14 (Bac S, Métropole-Réunion, juin 2015, ex 2)

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, B$(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, C$(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$, D$(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

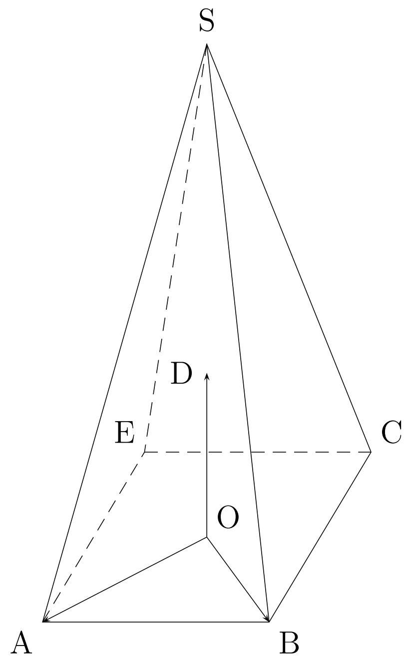
Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0,8t\ ;\ 1+0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a)** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?
   b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.
   c) Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point E$(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.
   d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
2. **a)** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.
   b) À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Exercice 14.15 (Bac S, Amérique du Nord, juin 2015, ex 1)

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O.
Soit D le point de l'espace tel que $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\text{OA}},\ \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OD}}\right)$ soit un repère orthonormé.
Le point S a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,3)$ dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure ci-dessus.
2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure ci-dessus.

3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\ ;\ -\frac{1}{6}\ ;\ 0\right)$.

Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$.

Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

14.6 Pour réviser

Chapitre du livre n° 12 – Produit scalaire dans l'espace

Les exercices résolus

- ex 1 p 323 : calculer des produits scalaires
- ex 2 p 323 : calculer une mesure d'angle
- ex 7 p 325 : utiliser les règles de calcul du produit scalaire
- ex 11 p 327 : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan
- ex 20 p 329 : vecteur normal à un plan
- ex 21 p 329 : équation cartésienne d'un plan
- ex 22 p 329 : deux plans perpendiculaires

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 468

- ex 3 p 323 : calculer des produits scalaires
- ex 6 p 323 : calculer une mesure d'angle
- ex 8 p 325 : calculer une distance et un produit scalaire en décomposant des vecteurs en somme de vecteurs
- ex 12 p 327 : orthogonalité de droites
- ex 24 p 329 : équation cartésiennes de deux plans, sont-ils perpendiculaires , parallèles ?

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 478

- ex 80 p 335 : QCM
- ex 81, 82 p 335 : Vrai-Faux
- ex 83 p 336 : plan tangent à une sphère, exercice de type bac

II Cours

14.1 Définitions et propriétés

On étend à l'espace la définition de norme d'un vecteur et de produit scalaire donnée dans le plan.

14.1.a Norme d'un vecteur

Définition 14.1

La norme d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Propriété 14.1

- Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ est donnée par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Pour un vecteur $\vec{u}$ et un nombre réel λ, $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$

14.1.b Définitions

Les définitions ci-dessous sont équivalentes.

Définition 14.2 (1)

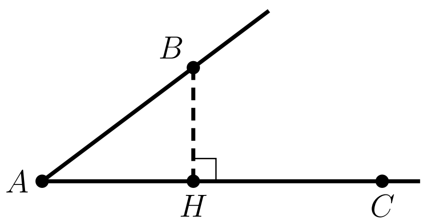
- Pour trois points A, B, C de l'espace $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
- Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

Définition 14.3 (2)

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ dans un repère orthonormé, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Définition 14.4 (3)

A, B, C sont trois points de l'espace et H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC). alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$



Définition 14.5 (4)

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$

14.1.c Propriétés

Propriété 14.2

- Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
  - Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
  - Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Pour trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et un nombre réel λ,
  $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

14.1.d Produit scalaire et orthogonalité

Propriété 14.3

Pour trois points A, B, C, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si et seulement si $(AB) \perp (AC)$ ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Définition 14.6

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** signifie que $\vec{u}.\vec{v} = 0$

14.2 Vecteur normal à un plan

Définition 14.7

Un vecteur normal à un plan est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.

Propriété 14.4

Une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan si et seulement si cette droite est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Remarque : cette propriété avait déjà été étudiée dans un chapitre précédent mais n'avait pas été démontrée.

Démonstration

Si une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan, il est bien évident qu'alors cette droite est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Réciproquement considérons une droite (Δ) orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) d'un plan (P).

Soit $\vec{n}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs respectifs de (Δ), (d_1), (d_2).

Les droites (d_1) et (d_2) étant sécantes, les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Soit (d) une droite quelconque du plan (P) et $\vec{w}$ un de ses vecteurs directeurs. Démontrons que cette droite est orthogonale à la droite (Δ).

Les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ sont coplanaires et les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires donc il existe des réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u_1} + y\vec{u_2}$.

Calculons maintenant le produit scalaire des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{n}$.

$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(x\,\vec{u_1} + y\,\vec{u_2}) = x\,\vec{n}.\vec{u_1} + y\,\vec{n}.\vec{u_2}$

Or la droite (Δ) est orthogonale aux droites (d_1) et (d_2) donc $\vec{n}.\vec{u_1} = 0$ et $\vec{n}.\vec{u_2} = 0$

donc $\vec{n}.\vec{w} = 0$ donc la droite (d) est orthogonale à la droite (Δ).

Propriété 14.5

Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires qui dirigent ce plan.

Démonstration : cette propriété est une conséquence de la propriété précédente.

Propriété 14.6

Un vecteur normal à un plan est orthogonal à tout vecteur directeur d'une droite de ce plan.

Démonstration

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan (P) est un vecteur directeur d'une droite Δ orthogonale à ce plan.

Or une droite orthogonale à un plan est une droite orthogonale à deux droites sécantes de ce plan, et d'après la propriété précédente une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toute droite de ce plan.

Donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur d'une droite du plan (P).

14.3 Équation cartésienne d'un plan

Propriété 14.7

Soient a, b, c trois nombres réels tels que au moins l'un des trois n'est pas nul, soit d un réel quelconque, et soit un repère orthonormé de l'espace.

- L'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dans ce repère qui vérifient l'égalité $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de l'espace.
- Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est un vecteur normal à ce plan.

Définition 14.8

Soient a, b, c trois nombres tels que au moins l'un des trois n'est pas nul et un repère orthonormé de l'espace.
L'égalité $ax + by + cz + d = 0$ vérifiée par tous les points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ d'un plan de l'espace est appelée **équation cartésienne** de ce plan.

Propriété 14.8

Pour un plan (P), un point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, un vecteur $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$,
une équation cartésienne du plan (P) passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ est :
$\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$

Méthode 14.1 (Calculer une équation cartésienne d'un plan)

Prenons un exemple. Dans un repère orthonormé, les coordonnées d'un points A, et d'un vecteur $\vec{n}$ sont : $A(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ $\quad \vec{n}(1\ ;\ 5\ ;\ -7)$.

Calculer une équation cartésienne du plan (P) passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

1re méthode

Puisque le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P), d'après la propriété 14.7, on sait qu'une équation cartésienne de (P) est : $x + 5y - 7z + d = 0$.

On sait que le point A appartient au plan (P), donc ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus, par conséquent remplaçons x, y, z, par les coordonnées du point A.

$-2 + 5 \times 3 - 7 \times 1 + d = 0 \iff 6 + d = 0 \iff d = -6$

Une équation du plan (P) est donc : $\boxed{x + 5y - 7z - 6 = 0}$.

2e méthode

On utilise la propriété 14.8.

Une équation cartésienne de (P) s'écrit alors : $1 \times (x - (-2)) + 5 \times (y - 3) - 7 \times (z - 1) = 0$.

$$\begin{aligned}
1 \times (x - (-2)) + 5 \times (y - 3) - 7 \times (z - 1) = 0 &\iff x + 2 + 5y - 15 - 7z + 7 = 0 \\
&\iff x + 5y - 7z + 2 - 15 + 7 = 0 \\
&\iff x + 5y - 7z + 2 - 15 + 7 = 0 \\
&\iff x + 5y - 7z - 6 = 0
\end{aligned}$$

Méthode 14.2 (Un point appartient-il à un plan ?)

Exemple : le point $A(3\ ;\ -1\ ;\ 4)$ appartient-il au plan (P) d'équation cartésienne $2x-y+5z-6 = 0$?

On remplace les coordonnées du point dans $2x - y + 5z - 6$, on effectue le calcul, et on vérifie si le résultat est bien égal à zéro ou non.

$2 \times 3 - (-1) + 5 \times 4 - 6 = 21 \neq 0$. Donc $\boxed{\text{le point } A \text{ n'appartient pas au plan } (P)}$.

Méthode 14.3 (Calculer les coordonnées d'un point d'un plan)

Exemple : calculons les coordonnées d'un point du plan (P) d'équation cartésienne $2x-y+5z-6 = 0$?

Méthode : choisir les valeurs de deux coordonnées de ce point et calculer la 3e coordonnée.

Par exemple, ici, on a intérêt à choisir $x = 0$ et $z = 0$, et on remplace ces valeurs dans l'équation du plan.

$2 \times 0 - y + 5 \times 0 - 6 = 0 \iff -y - 6 = 0 \iff y = -6$

Les coordonnées d'un point du plan (P) sont donc $\boxed{(0\ ;\ -6\ ;\ 0)}$

14.4 Positions relatives de deux plans

Propriété 14.9 (Plans parallèles ou sécants)

Soient $\vec{n_1}$ un vecteur normal à un plan (P_1) et $\vec{n_2}$ un vecteur normal à un plan (P_2).

- Les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires.
- Les plans (P_1) et (P_2) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ ne sont pas colinéaires.

Lorsque deux plans sont sécants, la définition ci-dessous permet de préciser ce que sont deux plans perpendiculaires.

Définition 14.9 (Plans perpendiculaires)

Soient $\vec{n_1}$ un vecteur normal à un plan (P_1) et $\vec{n_2}$ un vecteur normal à un plan (P_2).
Dire que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires signifie que les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux.

14.5 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété 14.10 (Droite et plan sécants ou non)

Pour une droite (d) de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$, et un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}$,

- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, la droite (d) et le plan (P) sont parallèles,
- sinon la droite (d) et le plan (P) sont sécants.

Propriété 14.11 (Droite et plan perpendiculaires ou non)

Pour une droite (d) de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$, et un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}$,
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, si et seulement si la droite (d) et le plan (P) sont perpendiculaires,

Méthode 14.4 (Positions relatives d'une droite et d'un plan)

Pour une droite (d) de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$, et un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}$, comment déterminer leur position relative ?

- On calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n}$
- si $\vec{u}.\vec{n} = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc la droite (d) et le plan (P) sont parallèles.
  - On choisit un point de la droite (d) et on vérifie si ce point appartient au plan (P).
  - Si ce point appartient au plan (P), la droite (d) est **incluse** dans le plan (P),
  - sinon la droite (d) est **strictement parallèle** au plan (P).
- si $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, donc la droite (d) et le plan (P) sont **sécants**.
  - si on veut savoir si (d) et (P) sont perpendiculaires, on utilise la propriété 14.11.

Exercice résolu : intersection d'une droite et d'un plan

Dans un repère orthonormé de l'espace, une équation cartésienne du plan (P) est $3x-2y+z+5=0$, et une représentation paramétrique de la droite (d) est $\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 1-3t \end{cases}$

1. Justifier que le plan P et la droite (d) sont sécants.
2. On appelle A le point d'intersection du plan P et de la droite (d). Calculer les coordonnées du point A.

Corrigé

1. D'après la propriété 14.10 et la méthode 14.4, il nous faut un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d) et un vecteur $\vec{n}$ normal à (P).
   D'après l'énoncé on a : $\vec{u}(1\ ;\ 1\ ;\ -3)$ et $\vec{n}(3\ ;\ -2\ ;\ 1)$.
   On calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{n} = 1\times 3 + 1\times(-2) + (-3)\times 1 = -2 \neq 0$.
   Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, par conséquent, d'après la propriété 14.10, $\boxed{\text{le plan } P \text{ et la droite } (d) \text{ sont sécants}}$.
2. Calculons les coordonnées de A point d'intersection de (P) et (d).
   On remplace respectivement x, y, z, par $2+t$, t, $1-3t$ dans l'équation $3x-2y+z+5=0$.
   On obtient : $3(2+t)-2t+(1-3t)+5=0$ et on résout cette équation d'inconnue t.
   $$\begin{aligned} 3(2+t)-2t+(1-3t)+5=0 &\iff 6+3t-2t+1-3t+5=0 \\ &\iff -2t+12=0 \\ &\iff -2t=-12=0 \\ &\iff t=6 \end{aligned}$$
   Dans la représentation paramétrique de (d), on remplace t par 6.
   $$\begin{cases} x = 2+6 = 8 \\ y = 6 \\ z = 1-3\times 6 = -17 \end{cases}$$
   Donc les coordonnées de A sont $\boxed{A(8\ ;\ 6\ ;\ -17)}$.