Chapitre 5

Nombres complexes

Et un jour on inventa les nombres complexes.

Les plus anciens nombres qui ont été inventés, il y a plusieurs milliers d'années, sont bien sûr les nombres entiers positifs 1, 2, 3, etc. Il fallait compter des personnes, des animaux, des objets, etc.

Le zéro est apparu plus tard, en Mésopotamie au II^e^ siècle avant Jésus Christ, puis en Inde au V^e^ siècle.

Les nombres entiers positifs étant insuffisants pour mesurer par exemple une longueur ou l'aire d'un terrain, parce qu'il faut partager l'unité en plusieurs parties, on a inventé les fractions entre -3000 et 0.

Les grecs anciens étaient persuadés que tous les nombres étaient des fractions, mais au V^e^/VI^e^ siècle av. JC un disciple de Pythagore découvre l'existence de $\sqrt{2}$, et démontre qu'on ne peut pas trouver de fraction telle que $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Il paraît même que cela aurait causé le meurtre ou le suicide de ce disciple.

Au VI^e^ siècle, pour des besoins comptables, les mathématiciens indiens utilisent des nombres négatifs, mais les négatifs n'apparaîtront en Europe qu'au XV^e^ siècle.

L'écriture décimale des nombres avec les chiffres de 0 à 9 a été inventée par les Indiens au IV^e^/V^e^ siècle, puis reprise par les mathématiciens arabes, d'où le nom de « chiffres arabes ». Au XV^e^ siècle, Al Kashi invente les nombres à virgules comme on les connaît actuellement, et ce n'est qu'au XVI^e^ /XVII^e^ siècle que ces nombres sont adoptés en Europe, grâce à un mathématicien flamand, Simon Stevin.

Au XVI^e^ siècle les mathématiciens italiens Cardan et Bombelli, qui veulent résoudre des équations du 3^e^ degré, inventent un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.[1] Cela donne naissance à un ensemble de nombres qui inclut les nombres réels nommé *ensemble des nombres complexes*.

En 1797 le mathématicien allemand Gauss découvre la forme géométrique des nombres complexes, ce sujet sera abordé dans ce chapitre et au chapitre 7.

En 1843, le mathématicien irlandais Hamilton invente l'ensemble des *quaternions*, qui inclut les réels et les complexes, mais ça, c'est une autre histoire ...

1. Pour en savoir plus, voir par exemple l'activité 1 page 235.

I Exercices

5.1 Calculs avec les complexes, forme algébrique

Exercice 5.1

Un nombre complexe s'écrit sous la forme $z = x + y\mathrm{i}$, où x et y sont des nombres réels et le nombre i est tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Écrire toutes les expressions ci-dessous sous la forme $x + y\mathrm{i}$.

1. $(3 - 5\mathrm{i}) + (6 + 2\mathrm{i})$ **2.** $(-8 + \mathrm{i}) - (7 + 4\mathrm{i})$ **3.** $(9 - 6\mathrm{i}) \times (2 - 3\mathrm{i})$
4. $(1 - 4\mathrm{i}) \times (3 + 9\mathrm{i})$ **5.** $(5 - \mathrm{i}) \times (5 + \mathrm{i})$ **6.** $(8 + 3\mathrm{i})^2$

Exercice 5.2

Écrire toutes les expressions ci-dessous sous la forme $x + y\mathrm{i}$.

1. $\dfrac{1}{3 + 2\mathrm{i}}$ Indication : multiplier au numérateur et au dénominateur par $3 - 2\mathrm{i}$.
2. $\dfrac{1}{6 - \mathrm{i}}$ (multiplier au numérateur et au dénominateur par $6 + \mathrm{i}$).
3. $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{4 - 5\mathrm{i}}$ (multiplier au numérateur et au dénominateur par $4 + 5\mathrm{i}$).
4. $\dfrac{-7 + 2\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}}$ (multiplier au numérateur et au dénominateur par $3 - \mathrm{i}$).

Exercice 5.3

On pose : $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ Calculer $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2$ sous forme algébrique.

Exercice 5.4

1. Calculer la partie réelle de : $\mathrm{i}(3 - 7\mathrm{i})$.
2. Calculer la partie imaginaire de : $\dfrac{1}{6 - 5\mathrm{i}}$.

Exercice 5.5

Écrire toutes les expressions ci-dessous sous la forme $x + y\mathrm{i}$.

1. $(a + b\mathrm{i}) + (a' + b'\mathrm{i})$ **2.** $(a + b\mathrm{i}) \times (a' + b'\mathrm{i})$ **3.** $(a + b\mathrm{i}) \times (a - b\mathrm{i})$ **4.** $\dfrac{1}{a + b\mathrm{i}}$

Exercice 5.6

Le nombre complexe z est égal à $x + y\mathrm{i}$. Écrire sous forme algébrique les expressions ci-dessous.

1. $3\mathrm{i}z$ **2.** $z^2 - z$ **3.** $\dfrac{2}{z}$ **4.** $\dfrac{1}{z + 1}$

Exercice 5.7

Le nombre complexe z est égal à $x + y\mathrm{i}$.

1. Calculer la partie imaginaire de $2\mathrm{i}(z + 1)$ en fonction de x et y.
2. Calculer la partie réelle de $(1 + \mathrm{i})(z - 3\mathrm{i})$ en fonction de x et y.

Exercice 5.8

Résoudre les équations ci-dessous. Donner chaque solution sous forme algébrique.

1. $2z - 3\mathrm{i} = -4 + 5\mathrm{i}$ **2.** $\mathrm{i}z + 8 = -\mathrm{i}$ **3.** $3 + z = 2\mathrm{i}z + 5 - \mathrm{i}$ **4.** $\dfrac{z-3}{z+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

Exercice 5.9

Résoudre les systèmes ci-dessous.

1. $\left\{\begin{array}{ccccc} 3z_1 & + & z_2 & = & 2-5\mathrm{i} \\ z_1 & - & z_2 & = & -2+\mathrm{i} \end{array}\right.$ **2.** $\left\{\begin{array}{ccccc} 2z_1 & - & z_2 & = & -2-3\mathrm{i} \\ z_1 & + & 3z_2 & = & 13+2\mathrm{i} \end{array}\right.$

5.2 Équation du second degré

Exercice 5.10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

1. $(z-\mathrm{i})(2z-6+4\mathrm{i}) = 0$ **2.** $\mathrm{i}z^2 + (2-\mathrm{i})z = 0$ **3.** $4z^2 - (1+\mathrm{i})^2 = 0$

Exercice 5.11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

1. $z^2 = 16$ **2.** $z^2 = 7$ **3.** $z^2 = 0$ **4.** $z^2 = -9$ **5.** $z^2 = -5$
6. $(z-2)^2 = -5$ **7.** $z^2 + 1 = 0$ **8.** $(2z+6)^2 + 16 = 0$

Exercice 5.12

On appelle $f(z)$ l'expression : $f(z) = (z-1+2\mathrm{i})(z-1-2\mathrm{i})$.

1. Développer $f(z)$ sous la forme $az^2 + bz + c$.
2. Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
3. À partir de l'expression développée, retrouver les solutions à l'aide du discriminant.

Exercice 5.13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

1. $z^2 - 10z + 34 = 0$ **2.** $9z^2 - 12z + 4 = 0$ **3.** $z^2 - 4z + 1 = 0$ **4.** $z^2 - 14z + 54 = 0$

Exercice 5.14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - z^2 - 20 = 0$ *(ce type d'équation s'appelle une équation bicarrée)*
Indication : poser $Z = z^2$, puis résoudre une équation d'inconnue Z, puis revenir à l'équation de départ.

Exercice 5.15

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^3 - 11z^2 + 39z - 29$.

1. Calculer $P(1)$.
2. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :
$P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

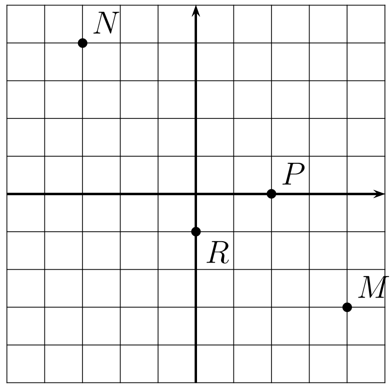
5.3 Représentation géométrique

Dès le 18e siècle des mathématiciens comme Euler ont l'idée d'associer un point ou un vecteur à un nombre complexe, mais c'est Gauss en 1811 qui formule l'idée de représenter un nombre complexe $z = x + y\text{i}$ dans un repère orthonormé du plan par le point M de coordonnées $M(x\ ;\ y)$.

Exercice 5.16

1. Dans le repère orthonormé ci-contre, placer les points A, B, C, D, associés aux complexes respectifs :
   $z_A = 4 + 2\text{i}$; $z_B = -3 - 4\text{i}$; $z_C = 3\text{i}$; $z_D = -1$.
2. Donner les nombre complexes z_M, z_N, z_P, z_R associés respectivement aux points M, N,P, R placés dans le repère ci-contre.

Vocabulaire : le nombre complexe $z = x + y\text{i}$ associé à chaque point $M(x\ ;\ y)$ est nommé **l'affixe de** M.



Exercice 5.17

Tracer un repère orthonormé et tracer chacun des ensembles de points ci-dessous.

1. L'ensemble des points dont l'affixe est un réel.
2. L'ensemble des points dont l'affixe est un imaginaire pur.
3. L'ensemble des points dont l'affixe a une partie réelle égale à -3.
4. L'ensemble des points dont l'affixe a une partie imaginaire égale à 5.
5. L'ensemble des points dont l'affixe a même partie réelle et imaginaire.

Exercice 5.18

z est un nombre complexe et $z = x + y\text{i}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $Z = z^2 + 6z - 2$ soit un réel.

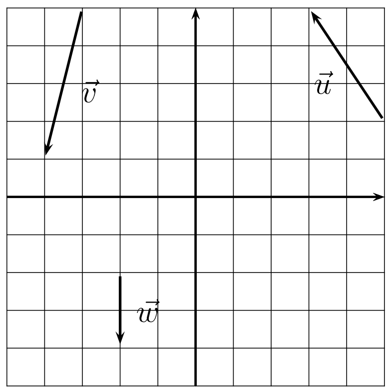
Indications :

- remplacer z par $x + y\text{i}$ dans l'expression $Z = z^2 + 6z - 2$
- puis écrire l'expression obtenue sous forme algébrique, la partie réelle en fonction de x et de y, et la partie imaginaire en fonction de x et de y.

Exercice 5.19

On a vu que l'on peut associer un nombre complexe et un point, de même on peut associer un nombre complexe et un vecteur. Par exemple l'affixe du vecteur $\vec{u}$ ci-contre est $-2 + 3\text{i}$.

1. Donner les affixes des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$.
2. Dans le repère orthonormé ci-contre, tracer les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$ d'affixes respectifs : $z_{\vec{a}} = 3 + \text{i}$ $z_{\vec{b}} = -3$ $z_{\vec{c}} = 1 - 3\text{i}$



Exercice 5.20

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points A et B d'affixes respectifs :
   $z_A = 2 + \text{i}$ et $z_B = 7 + 4\text{i}$.

2. Quel est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

3. Comment peut-on le calculer à partir des complexes z_A et z_B ?

Exercice 5.21

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points A, B, C, D, E d'affixes respectifs :
$z_A = -4 - \mathrm{i}$ $\quad z_B = -3 + 2\mathrm{i}$ $\quad z_C = 4 + 4\mathrm{i}$ $\quad z_D = 3 + \mathrm{i}$ $\quad z_E = -1 + 8\mathrm{i}$

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier par des calculs sur les affixes.

3. a) Justifier que $z_E - z_A = 3(z_B - z_A)$

b) Que peut-on en conclure pour les points A, B, E ? Justifier.

Exercice 5.22

1. Tracer un repère orthonormé et placer les points A et B d'affixes respectifs :
$z_A = -3 + 2\mathrm{i}$ et $z_B = 7 - 8\mathrm{i}$.

2. Quel est l'affixe z_K du point K milieu de $[AB]$.

3. Comment peut-on calculer l'affixe z_K à partir des complexes z_A et z_B ?

Exercice 5.23

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$.
À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 - 4z$.
On dit que le point M' est l'image du point M.

1. Tracer les axes du repère $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, et compléter la figure au fur et à mesure.

2. a) Placer le point A d'affixe $z_A = 1 - 2\mathrm{i}$.

b) L'image de A est A'. Calculer $z_{A'}$ l'affixe de A'.

c) Placer le point A' sur la figure.

3. On dit qu'un point M est *invariant* si et seulement si $z' = z$, c'est à dire si et seulement si $z^2 - 4z = z$.

a) Le point A est-il invariant ?

b) Déterminer les points invariants.

c) Les placer sur la figure.

4. Déterminer les points qui ont pour image le point B d'affixe -5.

5. K est le point d'affixe -3.

a) Tracer le quadrilatère $OAKA'$.

b) Le quadrilatère $OAKA'$ est-il un parallélogramme ? Ne pas justifier.

c) Déterminer les points M du plan tels $OMKM'$ est un parallélogramme.

d) Placer ces points et tracer ces parallélogrammes.

6. a) Le point A' est-il sur l'axe des réels ?

b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
Indication : calculer d'abord z' sous forme algébrique en fonction de x et de y.

c) Tracer l'ensemble $\mathscr{E}$ sur la figure.

5.4 Conjugué d'un nombre complexe

Le **nombre conjugué** d'un nombre complexe $z = x + y\mathrm{i}$ est $\boxed{\overline{z} = x - y\mathrm{i}}$.

Dans tout ce qui a été fait précédemment, la notion de conjugué d'un nombre complexe a déjà été utilisée, dans les calculs et pour l'équation du second degré.

Cette dernière partie a pour but d'étudier la notion de conjugué d'un nombre complexe pour elle même.

Exercice 5.24

On donne les nombres complexes z, z_1, z_2 : $z = x + y\mathrm{i}$ $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$

1. Vérifier si $\overline{z_1 + z_2}$ est égal à $\overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. Vérifier si $\overline{z_1 \times z_2}$ est égal à $\overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
3. Vérifier si $\overline{\dfrac{1}{z}}$ est égal à $\dfrac{1}{\overline{z}}$.

Exercice 5.25

Les nombres $\dfrac{5-2\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$ et $\dfrac{5+2\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}$ sont-ils conjugués ? Justifier.

Exercice 5.26

Pour chacun des complexes z ci-dessous, calculer $\overline{z}$ sous forme algébrique.

1. $z = (3-2\mathrm{i})(4-\mathrm{i})$. **2.** $z = \dfrac{1}{3+\mathrm{i}}$. **3.** $z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

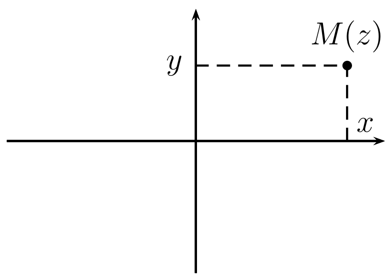
Exercice 5.27

z est un nombre complexe, et $z = x + y\mathrm{i}$. Résoudre les équations ci-dessous.

1. $(1+\mathrm{i})z - \mathrm{i}\overline{z} + 4\mathrm{i} = 0$ **2.** $2\mathrm{i}z - \overline{z} = 3\mathrm{i}$ **3.** $(3+2\mathrm{i})z = 2\mathrm{i}\overline{z} - 5\mathrm{i} = 0$

Exercice 5.28

L'affixe du point M représenté ci-contre est $z = x + y\mathrm{i}$.
Placer le point N d'affixe $\overline{z}$.



Exercice 5.29

z est un nombre complexe, et $z = x + y\mathrm{i}$. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $Z = 2\mathrm{i}z - 3\overline{z} + 4$ soit un imaginaire pur.

5.5 Pour réviser

Dans le livre Hyperbole, le chapitre sur les complexes est le chapitre 9.

Exercices *Pour s'exercer*, corrigés page 467

ex. 2 et 5 p 237 : mettre un produit, un carré, des quotients sous forme algébrique

ex 12, 13 p 239 : équation du 2nd degré

ex 25, 26 p 241 : représentation géométrique, affixe

ex 30, 31 p 243 : conjugué

Exercices *Objectif Bac*, corrigés page 476

ex 160 1., 161 1. p 257

ex 165 .A1, A2., B1. p 259

ex 166 p 259 (sans corrigé, mais avec indications)

II Cours

5.1 Définitions et conséquences

Définition 5.1 (L'ensemble des nombres complexes)

Il existe un ensemble de nombres, nommé **ensemble des nombres complexes**, et noté $\mathbb{C}$, qui possède les propriétés ci-dessous.

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$.
- Les règles de calculs de l'addition et de la multiplication restent les mêmes que dans l'ensemble $\mathbb{R}$.
- Il existe un nombre complexe, nommé i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** sous la forme $z = x + y\mathrm{i}$, où x et y sont des nombres réels.

Définition 5.2 (Forme algébrique)

L'écriture $z = x + y\mathrm{i}$ est nommée **forme algébrique** du nombre complexe z.
x est la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, y est la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Propriété 5.1

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et le même partie imaginaire, autrement dit : $x + y\mathrm{i} = x' + y'\mathrm{i} \iff x = x'$ et $y = y'$.

Remarque : en particulier $x + \mathrm{i}y = 0$ si et seument si $x = y = 0$.

Définition 5.3 (Conjugué d'un nombre complexe)

Le **nombre conjugué** d'un nombre complexe $z = x + y\mathrm{i}$ est $\boxed{\overline{z} = x - y\mathrm{i}}$.

Exemples de conjugués

Le conjugué de $2 + 7\mathrm{i}$ est $\boxed{2 - 7\mathrm{i}}$ et le conjugué de $4 - 3\mathrm{i}$ est $4 - (-3\mathrm{i})$ soit $\boxed{4 + 3\mathrm{i}}$.

5.2 Opérations avec les complexes

5.2.a Exemples de calculs

Le but des exemples ci-dessous est de montrer que, quand on effectue une addition, une multiplication ou une division entre complexes, on peut toujours écrire le résultat sous la forme $x + y\mathrm{i}$.

Autrement dit, lorsqu'on effectue une opération entre nombres complexes, on obtient bien un nombre complexe.

- **Addition et soustraction**
  $(2 + 3\mathrm{i}) + (7 - 5\mathrm{i}) = (2 + 7) + (3 - 5)\mathrm{i} = \boxed{9 - 2\mathrm{i}}$
  $(9 + \mathrm{i}) - (4 - 2\mathrm{i}) = 9 + \mathrm{i} - 4 + 2\mathrm{i} = (9 - 4) + (1 + 2)\mathrm{i} = \boxed{5 + 3\mathrm{i}}$
- **Multiplication**
  $$\begin{aligned}(4 - 9\mathrm{i}) \times (6 + 2\mathrm{i}) &= 24 + 8\mathrm{i} - 54\mathrm{i} - 18\mathrm{i}^2 = 24 + 8\mathrm{i} - 54\mathrm{i} - 18 \times (-1) = 24 + 18 + 8\mathrm{i} - 54\mathrm{i} \\ &= \boxed{42 - 46\mathrm{i}}\end{aligned}$$

- **Inverse et division**
  Dans le calcul ci-dessous on multiplie au numérateur et au dénominateur par $3-4\text{i}$, le **nombre conjugué de** $3+4\text{i}$ (voir plus haut, la définition 5.3).
  $$\frac{1}{3+4\text{i}} = \frac{1\times(3-4\text{i})}{(3+4\text{i})\times(3-4\text{i})} = \frac{3-4\text{i}}{3^2-(4\text{i})^2} = \frac{3-4\text{i}}{9+16} = \frac{3-4\text{i}}{25} = \boxed{\frac{3}{25}-\frac{4}{25}\text{i}}$$
  Dans le calcul ci-dessous on multiplie au numérateur et au dénominateur par $2+\text{i}$ qui est le conjugué de $2-\text{i}$.
  $$\frac{5-3\text{i}}{2-\text{i}} = \frac{(5-3\text{i})\times(2+\text{i})}{(2-\text{i})\times(2+\text{i})} = \frac{10-3\text{i}^2+5\text{i}-6\text{i}}{2^2-\text{i}^2} = \frac{13-\text{i}}{4+1} = \frac{13-\text{i}}{5} = \boxed{\frac{13}{5}-\frac{1}{5}\text{i}}$$

5.2.b Règles de calculs

Propriété 5.2

Pour deux nombres complexes z et z' tels que $z = x+y\text{i}$ et $z' = x'+y'\text{i}$, on a les égalités ci-dessous.

- **Addition :** $z+z' = (x+x')+(y+y')\text{i}$
- **Multiplication :** $z\times z' = (xx'-yy')+(xy'+x'y)\text{i}$
- **Inverse :** pour $z\neq 0$ (c'est à dire pour $x\neq 0$ et pour $y\neq 0$), $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x-y\text{i}}{x^2+y^2}$
- **Division :** pour $z'\neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = z\times\dfrac{1}{z'}$

Propriété 5.3 (Produit de deux conjugués)

Pour un nombre complexe $x+y\text{i}$, et son conjugué $x-y\text{i}$, on a l'égalité : $(x+y\text{i})\times(x-y\text{i}) = x^2+y^2$.

5.3 Équation du second degré à coefficients réels.

Le programme indique qu'un élève doit savoir résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels.

Propriété 5.4

Résolution de l'équation $\boldsymbol{az^2+bz+c=0}$ (a, b, c sont des réels, $a\neq 0$, et z est un complexe).
On calcule le discriminant : $\Delta = b^2-4ac$.

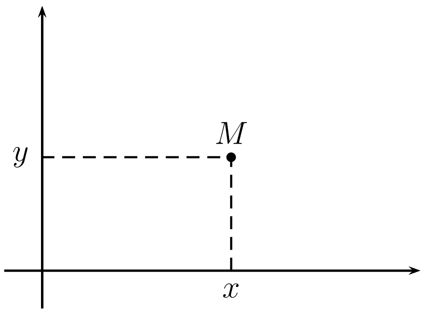
- Si Δ est positif ou nul, les solutions sont les mêmes que pour l'équation du second degré étudiée en première.
  $\Delta > 0$ il y a deux solutions qui sont des nombres réels : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  $\Delta = 0$ il y a une solution qui est un nombre réel : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors
  - il n'y a pas de solution réelle (cours de première) ;
  - il y a deux solutions complexes qui sont des nombres conjugués :
    $z_1 = \dfrac{-b-\text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\text{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ (si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$)

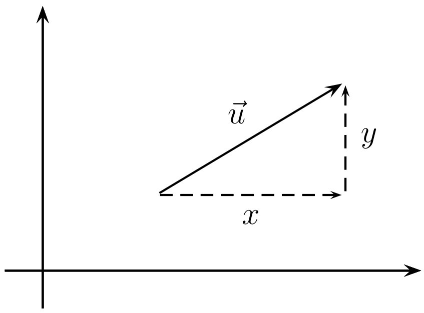
5.4 Représentation géométrique d'un nombre complexe.

Le programme indique qu'un élève doit savoir
- *représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur ;*
- *déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.*

Définition 5.4 (Affixe d'un point ou d'un vecteur)

- Un nombre complexe $z_M = x + y\mathrm{i}$ est représenté dans un repère orthonormé du plan par le point M de coordonnées $M(x\ ;\ y)$.
  On dit alors que z_M est **l'affixe** du point M.
- Un nombre complexe $z_{\vec{u}} = x + y\mathrm{i}$ est représenté dans un repère orthonormé du plan par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\vec{u}(x\ ;\ y)$.
  On dit alors que $z_{\vec{u}}$ est **l'affixe** du vecteur $\vec{u}$.





Remarque : en mathématiques le nom *affixe* est féminin.

Vocabulaire – Plan complexe

La définition précédente indique qu'on représente un nombre complexe par un point dans un repère orthonormé du plan.

On dit alors que le plan est *muni d'un repère orthonormé*, où qu'il est *rapporté à un repère orthonormé.* On précise parfois *repère orthonormé direct* $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Enfin, on parle aussi de *plan complexe* muni d'un repère orthonormé.

Vocabulaire – Axe des réels et axe des imaginaires.

Dans le plan complexe,
- tous les points d'affixes réels sont sur l'axe des abscisses, qu'on appelle ainsi *l'axe des réels* ;
- tous les points d'affixes imaginaires purs sont sur l'axe des ordonnées, qu'on appelle ainsi *l'axe des imaginaires* ;

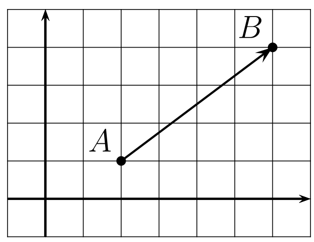
Propriété 5.5 (Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$)

Pour deux points A d'affixe z_A et B d'affixe z_B,
le nombre complexe $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple

$A(2+\mathrm{i})$ $\quad B(6+4\mathrm{i})$ $\qquad z_A = 2+\mathrm{i}$ $\quad z_B = 6+4\mathrm{i}$

$z_B - z_A = (6+4\mathrm{i}) - (2+\mathrm{i}) = 6+4\mathrm{i} - 2 - \mathrm{i} = (6-2) + (4\mathrm{i} - \mathrm{i}) = 4+3\mathrm{i}$



5.5 Conjugué d'un nombre complexe

Remarque

La définition du conjugué d'un nombre complexe et une propriété ont été données plus haut :
- définition du conjugué d'un nombre complexe, voir définition 5.3;
- propriété du produit de deux conjugués, voir propriété5.7.

Propriété 5.6 (Règles de calculs sur les conjugués)

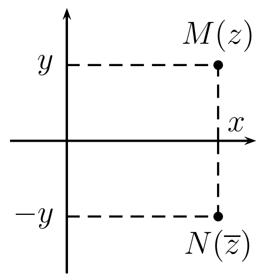
Pour deux nombres complexes z et z' :
- le conjugué de la somme est la somme des conjugués : $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- le conjugué du produit est le produit des conjugués : $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- le conjugué de l'inverse est l'inverse du conjugué : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
- le conjugué du quotient est le quotient des conjugués : $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Propriété 5.7 (Deux points d'affixes conjugués)

Deux points du plan complexe d'affixes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple

Le point M d'affixe z et le point N d'affixe $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



5.6 Utilisation de la calculatrice

Le nombre complexe i est accessible sur une calculatrice,

avec une calculatrice TI : 2nde [$\boldsymbol{i}$] **avec une calculatrice CASIO :** SHIFT [$\boldsymbol{i}$]

5.7 Utilisation de GeoGebra

On peut utiliser GeoGebra pour effectuer des calculs avec les nombres complexes.

Cliquer sur Affichage/Calcul formel

Pour obtenir le nombre complexe i, saisir : Alt + I

Exemple 1 : calcul de $(3 - 5\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})$

On saisit la commande (3-5 i)(2+ i), on appuie sur Entrer, et on voit :

(3-5 i)(2+ i)
→ 11-7 i

Exemple 2 : développement de $(x - y\mathrm{i})(x + y\mathrm{i})$

(x-y i)(x+y i)
→ $x^2 + y^2$

Exemple 3 : forme algébrique de $\dfrac{1}{x+y\mathrm{i}}$

Développer[1/(x+y i)]

$\rightarrow \quad \dfrac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$

Exemple 4 : résoudre l'équation d'inconnue z, $2z - 3\mathrm{i} = -4 + 5\mathrm{i}$

CRésoudre[2z-3 i =-4+5 i]

$\rightarrow$ {z= −2+4 i}

Exemple 5 : résoudre l'équation d'inconnue z, $z^2 + 3z + 3 = 0$

CRésoudre[z^2+3z+3=0]

$\rightarrow \quad \left\{ z = \dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 3\Big), z = \dfrac{1}{2}\Big(-\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 3\Big) \right\}$