Chapitre 1

Suites

I Exercices

1.1 Rappels de 1re S, suites arithmétiques et géométriques

Les exercices suivants permettent de revoir ce qui a été étudié sur les suites en première S. Cela est rappelé dans le cours à partir de la page 23, aux paragraphes 1.1.b, 1.2, 1.3.

Exercice 1.1

1. La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n par $u_n = 5n + 2$.
  a) Calculer u_0, u_1, u_2.
  b) Justifier si la suite (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

2. Mêmes consignes a) et b) pour la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + 1$.

3. Mêmes consignes a) et b) pour la suite (u_n) définie par $u_n = 7 \times 3^n$.

Exercice 1.2

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
  a) Calculer u_1, u_2.
  b) Justifier si la suite (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

2. Mêmes consignes a) et b) pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 0,8u_n$.

3. Mêmes consignes a) et b) pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 1,5$.

Exercice 1.3

1. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison 0,5.
Calculer u_{15}, puis calculer la somme $S = u_0 + \cdots + u_{15}$.

2. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison 0,9.
Calculer la somme $S = u_0 + \cdots + u_{10}$. Arrondir au centième près.

Exercice 1.4

1. La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
  a) Calculer u_2, u_3.
  b) Justifier si la suite (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre.

2. La suite (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_1 = 5$ de raison 3,5.
   Calculer u_{20} et calculer la somme $S = u_1 + \cdots + u_{20}$.
3. La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_1 = 9$ et de raison 0,7. Écrire l'expression de u_n en fonction de n.
4. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1{,}2\, u_n$.
   a) Écrire l'expression de u_n en fonction de n en justifiant.
   b) Calculer la somme $S = u_0 + \cdots + u_{18}$. Arrondir au centième près.

Exercice 1.5

Pour tout entier naturel n, les suites (u_n) et (v_n) sont définies par : $u_n = 3n^2 + 5n - 7$ et $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 4v_n + 8$

Le tableau ci-contre est extrait d'une feuille de calcul d'un tableur, et indique des valeurs des termes de ces deux suites.

	A	B	C
1	n	Un	Vn
2	0	-7	2
3	1	1	16
4	2	15	72

1. Quelle est la formule à saisir dans la cellule B2 et à recopier vers le bas, qui permette d'obtenir les termes successifs de la suite (u_n) ?
2. Quelle est la formule à saisir dans la cellule C3 et à recopier vers le bas, qui permette d'obtenir les termes successifs de la suite (v_n).

Exercice 1.6

Dans l'algorithme ci-contre, la variable u est un nombre réel et les variables k et n sont des entiers naturels.

```
u ← 2
Pour k allant de 1 à n
    u ← 0,8u + 1
Fin du Pour
```

1. Quelle est la valeur finale de u lorsque $n = 3$ quand on exécute cet algorithme ?
   Détailler les calculs sans arrondir.
2. Trois suites sont définies ci-dessous. Quelle est la suite pour laquelle l'algorithme précédent permet de calculer u_n ?
   $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$ $\qquad$ $u_n = 0,8n + 1$ $\qquad$ $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$

Exercice 1.7

1. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n - n + 1$.
   Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.
2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.
   Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

Les deux exercices suivants font intervenir des pourcentages d'augmentation ou de réduction, que l'on appelle taux d'évolution. Dans le cours, on pourra consulter le paragraphe 1.3.c page 26.

Exercice 1.8

Une source sonore émet un son dont l'intensité est de 1 000 décibels.

Une plaque d'isolation phonique d'un certain type absorbe 45 % de l'intensité du son. On note u_n l'intensité du son, mesuré en décibels, après la traversée de n plaques d'isolation phonique. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer les trois termes suivants de la suite.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,55u_n$. En déduire que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

4. Déterminer à l'aide de la calculatrice le nombre minimum de plaques que doit traverser le son pour que l'intensité soit inférieure au dixième de sa valeur initiale.

Exercice 1.9

La population d'une ville augmente régulièrement de 10 % par an. En 2000, elle était de 8 000 habitants.

On désigne par u_n le nombre théorique d'habitants estimé pour l'année $(2000 + n)$. On a donc $u_0 = 8\,000$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.

2. Exprimer le terme u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. Calculer le nombre d'habitants prévu pour 2006.

4. À partir de quelle année la population aura dépassé le double de la population en 2000 ? Justifier.

Exercice 1.10

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 5$

1. Calculer les termes u_1 et u_2.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

3. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 10$.

a) Établir une relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire que (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques.

Pour répondre à cette question, on peut lire le paragraphe du cours 1.3.d page 27.

b) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

4. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-2} près.

Exercice 1.11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$

1. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2$.

a) Établir une relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire que (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques

b) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

2. Calculer u_{12}.

1.2 Raisonnement par récurrence

Exercice 1.12

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

2. D'après ces valeurs de u_n, quelle semble être la formule qui donne u_n en fonction de n ?

3. Cette formule est-elle vraie pour $n = 0$?

4. Justifier que si cette formule est vraie pour u_n utiliser la relation de récurrence pour justifier que cette formule est vraie pour u_{n+1}.

Ce qui a été fait aux questions 3 et 4 ci-dessus s'appelle un **raisonnement par récurrence**.
Voir cours 1.4.

Exercice 1.13

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2(n+1)$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + n$.

Exercice 1.14

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 2$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 3n + 1$.

Exercice 1.15

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4 sous forme de fractions.
2. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer par récurrence que cette expression est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 1.16

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+2} - 3$

Exercice 1.17

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 3u_n - 4$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 6 \times 3^n + 2$

Exercice 1.18

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 8$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.
2. D'après ces valeurs de u_n, quelle semble être la formule qui donne u_n en fonction de n ? Autrement dit, conjecturer la formule.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 1.19

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, (u_n) est le nombre de segments qui relient n points A_1, A_2, A_3, …, A_n.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Exercice 1.20

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.3 Sens de variation d'une suite numérique.

Exercice 1.21

Justifier le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous.

Voir les rappels de première S dans le cours, paragraphe 1.5 *Sens de variation d'une suite numérique.*

1. $u_n = -3n + 4$ **2.** $u_n = 5 \times 1,2^n$ **3.** $u_n = 0,9^n$ **4.** $u_n = n^3 + n$

Exercice 1.22

Justifier le sens de variation de chacune des suites définies ci-dessous.

1. $u_n = -5 \times 1,03^n$ **2.** $u_n = 5n - 2$ **3.** $u_n = 2 \times 0,85^n$ **4.** $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$

Exercice 1.23

1. On admet que chacune des suites définies dans le tableau ci-dessous est de signe constant et de sens de variation constant (monotone).
Sans justifier, indiquer le signe et le sens de variation de chacune de ces suites.

Suite	**Signe**	**Sens de variation**
$u_n = \dfrac{1}{n+1}$		
$u_n = -3n - 4$		
$u_n = 1,5^n$		
$u_n = (-8) \times 0,5^n$		

2. Indiquer si chacune de ces affirmations est vraie ou fausse. Si c'est vrai, justifier, sinon donner un exemple.
Affirmation 1 : si une suite est positive, alors elle est croissante.
Affirmation 2 : si une suite est croissante , alors elle est positive.
Affirmation 3 : si une suite est négative, alors elle est décroissante.
Affirmation 4 : si une suite est décroissante, alors elle est négative.

Exercice 1.24

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3.

2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. Pour cela, démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.

Exercice 1.25

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5 - \dfrac{1}{u_n}$.

1. On appelle f la fonction définie par $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 1.26

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n^2}$.

1. On appelle g la fonction définie par $g(x) = 4 + x^2$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. On appelle f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

1.4 Suite majorée, minorée, bornée

Lire d'abord dans le cours la signification des expressions *suite majorée*, *suite minorée*, *suite bornée* au paragraphe 1.6 *Suite majorée, minorée, bornée*

Exercice 1.27

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

1. La suite (u_n) est-t-elle minorée ? Si oui, par quel nombre ? Justifier
2. La suite (u_n) est-t-elle majorée ? Si oui, par quel nombre ?
3. La suite (u_n) est-t-elle bornée ?

Exercice 1.28

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5n - 7$

1. La suite (u_n) est-t-elle minorée ? Si oui, par quel nombre ?
2. La suite (u_n) est-t-elle majorée ? Si oui, par quel nombre ? Justifier.
3. La suite (u_n) est-t-elle bornée ?

Exercice 1.29

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

1. La suite (u_n) est-t-elle minorée ? Si oui, par quel nombre ? Justifier.
2. La suite (u_n) est-t-elle majorée ? Si oui, par quel nombre ? Justifier.
3. La suite (u_n) est-t-elle bornée ?

Exercice 1.30

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n + 120$.

1. **a)** La suite (u_n) semble-t-elle minorée ? Si oui, par quel nombre ? Répondre sans justifier en utilisant la calculatrice.
   b) Démontrer la réponse précédente.
2. La suite (u_n) semble-t-elle majorée ? Si oui, par quel nombre ? Répondre sans justifier en utilisant la calculatrice.
3. La suite (u_n) est-t-elle bornée ?

Exercice 1.31

Pour chacune des suites définies ci-dessous, indiquer si cette suite est bornée. Justifier sa réponse.

1. $u_n = 0,6^n$ **2.** $u_n = (-1)^n$

Exercice 1.32

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n + 4$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

Exercice 1.33

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

Exercice 1.34

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. Pour cela, démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

1.5 Limite finie ou infinie d'une suite

Exercice 1.35

En utilisant la calculatrice ou le tableur, indiquer sans justifier quel semble être le comportement à l'infini de chacune de ces suites.

1. $u_n = n^3 + 6$ **2.** $u_n = (-1,2)^n$ **3.** $u_n = \dfrac{8n+5}{n}$ **4.** $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Exercice 1.36

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite ℓ de cette suite ?
2. D'après la définition du cours, dire qu'une suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
   a) Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]\ell - 0,1\ ;\ \ell + 0,1[$. Justifier.
   b) Même question pour $]\ell - 0,001\ ;\ \ell + 0,001[$.

Exercice 1.37

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 7 + \dfrac{1}{n^2}$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite ℓ de cette suite ?
2. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]\ell - 0{,}000\,1\ ;\ \ell + 0{,}000\,1[$. Justifier.

Exercice 1.38

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{5}{\sqrt{n}}$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite ℓ de cette suite ?
2. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]\ell - 0{,}05\ ;\ \ell + 0{,}05[$. Justifier.

Exercice 1.39
La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = \dfrac{1}{n^3}$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite ℓ de cette suite ?
2. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]\ell - 0{,}001\ ;\ \ell + 0{,}001[$. Justifier.

Exercice 1.40
La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = n^2 - 100$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite de cette suite ?
2. D'après la définition du cours, dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que : tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
   On choisit $A = 1\,000$. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]1\,000\ ;\ +\infty[$. Justifier.

1.6 Limite d'une suite et algorithmique

Le programme précise que, pour une suite (u_n) croissante qui tend vers $+\infty$ et un nombre réel A, un élève de terminale S doit savoir déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.

Exercice 1.41
La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = n^3 + 1\,000\,n$.

1. **a)** Justifier que la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 1\,000x$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Qu'en déduit-on pour la suite (u_n) ?
2. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite de cette suite ?
3. Déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]20\,000\ ;\ +\infty[$.
4. Écrire un algorithme qui permet à partir d'un nombre A de déterminer le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$.
   On pourra lire dans le cours le paragraphe 1.8 page 32.
5. Programmer cet algorithme à la calculatrice ou en Python 3, et le tester en utilisant la réponse à la question **3.**

Exercice 1.42
La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = n^3 - 3n^2 + 4$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, vérifier que la limite de cette suite est $+\infty$.
2. Déterminer sans justifier le rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]1\,000\,000\ ;\ +\infty[$. On pourra adapter le programme de l'exercice 1.41.

1.7 Suites de référence

Exercice 1.43

Sans justifier, donner la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

On appelle ces suites des ***suites de référence*** *et leur limite lorsque n tend vers $+\infty$ doit être connue.*

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$ **2.** $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ **3.** $u_n = \dfrac{1}{n^3}$ **4.** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

5. $u_n = n$ **6.** $u_n = n^2$ **7.** $u_n = n^3$ **8.** $u_n = \sqrt{n}$

1.8 Opérations sur les limites

Exercice 1.44

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite d'une somme de deux suites, quand on connaît les limites des deux suites.

On ne démontrera pas les résultats obtenus.

1. On connaît maintenant les limites des suites de références (n), (n^2), (n^3), $(\sqrt{n})$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

À partir de ces limites déterminer la limite de chacune des suites définies ci-dessous. On pourra vérifier à la calculatrice ou dans un tableur. On ne demande pas de justifier.

a) $u_n = 3 + \dfrac{1}{n^2}$ **b)** $u_n = -4 + n^3$ **c)** $u_n = 7 - n$ **d)** $u_n = n^2 + n^3$

e) $u_n = -n^2 - n$ **f)** $u_n = n^2 - n^3$ **g)** $u_n = n^2 - n$

2. À l'aide des résultats précédents, compléter sans justifier le tableau ci-dessous. Par exemple dans la deuxième colonne, la limite de la suite (u_n) est un nombre ℓ, et la limite de la suite (v_n) est un nombre ℓ', quelle est alors la limite de la somme $u_n + v_n$?

S'il y a un doute, écrire un point d'interrogation.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$						

Exercice 1.45

À partir du tableau précédent, déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous. Indiquer FI si c'est une forme indéterminée.

1. $u_n = n^2 + n$ **2.** $u_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$ **3.** $u_n = n - n^3$ **4.** $u_n = n^3 + 6$ **5.** $u_n = -n - n^3$

6. $u_n = 8 - n^2$ **7.** $u_n = n^3 - n^2$

Exercice 1.46

À partir du tableau précédent, déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous. Indiquer FI si c'est une forme indéterminée.

1. $u_n = n^2 + 1$ **2.** $u_n = -n^6 - n^3$ **3.** $u_n = 9 - n^4$ **4.** $u_n = n^5 - n^4$ **5.** $u_n = n^5 + n^2$
6. $u_n = -6 + \dfrac{1}{n}$ **7.** $u_n = -n + n^7$

Exercice 1.47

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite d'un produit de deux suites, quand on connaît les limites des deux suites.

On ne démontrera pas les résultats obtenus.

1. Chaque suite (p_n) définie ci-dessous est un produit $u_n \times v_n$. Compléter le tableau ci-dessous. On pourra vérifier à la calculatrice ou dans un tableur et on ne demande pas de justifier.

   a) $p_n = \left(3 + \dfrac{1}{n^2}\right) \times \left(5 + \dfrac{1}{n}\right)$ **b)** $p_n = \left(4 + \dfrac{1}{n}\right) \times n^3$ **c)** $p_n = n^3 \times \sqrt{n}$

   d) $p_n = \dfrac{1}{n} \times n^3$ **e)** $p_n = \dfrac{1}{n^2} \times n$ **f)** $p_n = \dfrac{1}{n} \times (n+2)$

	a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$						
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$						
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$						

2. À l'aide des résultats précédents, compléter sans justifier le tableau ci-dessous. Par exemple dans la deuxième colonne, la limite de la suite (u_n) est un nombre ℓ, et la limite de la suite (v_n) est un nombre ℓ', quelle est alors la limite du produit $u_n \times v_n$?
   Si on ne peut pas conclure, écrire FI (*forme indéterminée*).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$				

Exercice 1.48

Déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous. Indiquer FI si c'est une forme indéterminée.

On pourra utiliser les tableaux des propriétés 1.11 et 1.12. Pour le signe d'un produit on utilisera la règle des signes de la multiplication.

1. $u_n = -5n^2$ **2.** $u_n = 7 \times \left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ **3.** $u_n = \left(4 + \dfrac{1}{n}\right) \times \left(-2 + \dfrac{1}{n}\right)$ **4.** $u_n = n\sqrt{n}$
5. $u_n = n^3 + n\sqrt{n}$ **6.** $u_n = 3n^2 + 6n$ **7.** $u_n = 8n^3 + 7n - 9$ **8.** $u_n = 1 - 4\sqrt{n}$

Exercice 1.49

L'objectif de cet exercice est de donner une technique de calcul pour déterminer une limite lorsqu'on a une forme indéterminée. On appelle cela ***lever l'indétermination****.*

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide du tableau sur la limite d'une somme (propriété 1.11) ?

2. Pour pouvoir déterminer la limite de cette somme nous allons ***mettre en facteur le terme de plus haut degré***. Le terme n^2 est de degré 2 et le terme n est de degré 1, on met donc n^2 en facteur.

   Justifier par un calcul que : $n^2 - n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$

3. On sait maintenant que pour tout entier naturel non nul, $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

   Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.50

Utiliser la technique de calcul de l'exercice 1.49 pour déterminer la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

1. $u_n = n^3 - n$ **2.** $u_n = n^2 - n^3$ **3.** $u_n = n^3 - 5n^2 + 2n$ **4.** $u_n = -3n^2 + 4n + 1$

Exercice 1.51

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite d'un quotient de deux suites, quand on connaît les limites des deux suites.

On ne démontrera pas les résultats obtenus.

1. Déterminer sans justifier la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

   a) $s_n = \dfrac{1}{n^2}$ **b)** $t_n = \dfrac{1}{n}$ **c)** $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ **d)** $v_n = 4 + \dfrac{1}{n^2}$ **e)** $w_n = n^2$ **f)** $z_n = n^3$

2. Déterminer sans justifier la limite de chacun des quotients ci-dessous. On pourra vérifier à la calculatrice ou dans un tableur.

   a) $\dfrac{u_n}{v_n}$ **b)** $\dfrac{u_n}{s_n}$ **c)** $\dfrac{u_n}{w_n}$ **d)** $\dfrac{s_n}{t_n}$ **e)** $\dfrac{t_n}{s_n}$ **f)** $\dfrac{w_n}{u_n}$ **g)** $\dfrac{z_n}{t_n}$ **h)** $\dfrac{w_n}{z_n}$ **i)** $\dfrac{z_n}{w_n}$

3. À l'aide des résultats précédents, compléter sans justifier le tableau ci-dessous. Par exemple dans la deuxième colonne, la limite de la suite (u_n) est un nombre ℓ, et la limite de la suite (v_n) est un nombre ℓ' non nul, quelle est alors la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$?

   Si on ne peut pas conclure, écrire FI (*forme indéterminée*).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	0	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0	∞	0	$\ell' \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$							

Exercice 1.52

À l'aide des tableaux des propriétés 1.11, 1.12, 1.13, déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous. Indiquer FI si c'est une forme indéterminée.

On utilisera la règle des signes de la multiplication et de la division pour déterminer le signe du résultat.

1. $\dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{3 - \dfrac{1}{n^2}}$ **2.** $\dfrac{5}{n+2}$ **3.** $\dfrac{n^3}{-4 + \dfrac{1}{n}}$ **4.** $\dfrac{n^2 - 7}{n+2}$

Exercice 1.53

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3n-1}{n+5}$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide du tableau sur la limite d'un quotient (propriété 1.13) ?
2. Pour pouvoir déterminer la limite de cette somme nous allons utiliser une méthode de calcul analogue à celle de l'exercice 1.49 : nous allons mettre en facteur le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

   Justifier par un calcul que : $u_n = \dfrac{3n\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)}{n\left(1+\dfrac{5}{n}\right)}$.
3. Simplifier la fraction précédente, puis déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.54

Déterminer la limite de chacune des suites définies ci-dessous. Si on a une forme indéterminée, effectuer les calculs nécessaires pour lever l'indétermination.

1. $u_n = \dfrac{n-4}{2n+1}$ **2.** $u_n = -\dfrac{8}{n+3}$ **3.** $u_n = \dfrac{n}{1+n^2}$ **4.** $u_n = \dfrac{n^3+6}{1+n}$

Exercice 1.55

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^3 + 4n^2$.

1. Justifier que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ est $+\infty$.
2. On sait donc qu'il existe un entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10\,000$.

   Dans l'algorithme ci-contre, la variable k est un entier naturel, et la variable u est un réel. Compléter cet algorithme pour que la valeur finale de k soit le premier entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10\,000$.

```
k ← 0
Tant que ......................
    u ← k^3 + 4k^2
    k ← k + 1
Fin du Tant que
```

1.9 Limites de suites et comparaison

1.9.a Limite infinie

Exercice 1.56

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par $v_n = n^2 + (-1)^n$.

1. Peut on déterminer la limite de cette suite d'après les règles de calcul sur les limites ?
2. Déterminer une suite u_n telle $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$
3. Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

Exercice 1.57

Deux suites (u_n) et (v_n) sont telles que pour tout entier naturel n $u_n \leqslant v_n$ et (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Comment la suite (v_n) se comporte-t-elle quand n tend vers $+\infty$? Démontrer sa réponse.

Indications

On veut démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

On veut donc démontrer que tout intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang.

On considère donc un nombre A quelconque et il faut démontrer qu'à partir d'un certain rang $v_n > A$.

Exercice 1.58

Déterminer en justifiant la limite de chacune des suites définies ci-dessous.

1. $u_n = \sqrt{n} + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ **2.** $u_n = -n^3 + (-1)^n$

Exercice 1.59

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + 4 \times (-1)^n$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

2. La suite (u_n) est-elle croissante ?

3. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n - 4$.

4. En justifiant, en déduire la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

5. Indiquer si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifier.
Si la limite d'une suite est $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors cette suite est croissante.

1.9.b Théorème des gendarmes

Exercice 1.60

Pour trois suites (u_n), (v_n), (w_n),

- si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;
- et si les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite ℓ ;

Quel est alors le comportement de la suite (v_n) lorsque n tend vers $+\infty$? Ne pas justifier.

On appelle cette propriété *le théorème des gendarmes*.

Exercice 1.61

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $-\dfrac{1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) en justifiant.

Exercice 1.62

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) en justifiant.

1.9.c Théorème de convergence

Exercice 1.63

1. Si une suite (u_n) est croissante et majorée, quel est le comportement de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$?
   - Est-ce que cette suite tend vers $+\infty$?
   - Est-ce que cette suite converge (tend vers une limite ℓ) ?
   - Est-ce que cette suite n'a pas de limite ?
2. Même question pour une suite décroissante et minorée.

Exercice 1.64

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$.

On appelle f la fonction définie par $f(x) = 0,5x + 2$.

Partie A – Constructions et conjectures

1. La fonction f est représentée sur la figure 1.1, ainsi que la droite d'équation $y = x$.
   La construction géométrique du terme u_1 est déjà tracée. Construire les termes u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturer par lecture graphique
   a) le sens de variation de la suite (u_n) ;
   b) le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

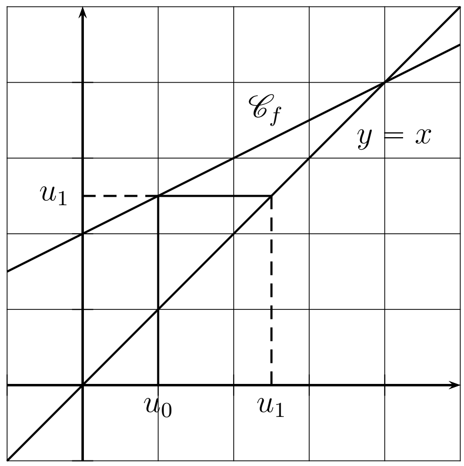


Fig. 1.1

Partie B – Démonstrations

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 5$.
4. Justifier que la suite (u_n) a une limite.
5. Justifier que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
6. Déterminer la limite ℓ en justifiant.

Exercice 1.65

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,3\,u_n + 1$.

On appelle f la fonction définie par $f(x) = 0,3\,x + 1$.

Partie A – Constructions et conjectures

1. Sur la figure 1.2, tracer la représentation graphique de la fonction f et tracer la droite d'équation $y = x$.
2. Construire les termes u_1, u_2, u_3.
3. Conjecturer par lecture graphique
   a) le sens de variation de la suite (u_n) ;
   b) le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

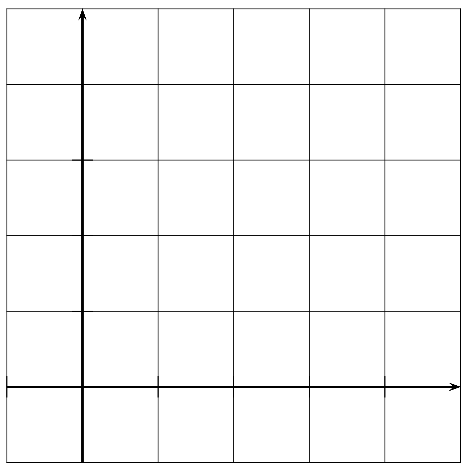


Fig. 1.2

Partie B – Démonstrations

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
4. Justifier que la suite (u_n) a une limite.
5. Justifier que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
6. Déterminer la limite ℓ en justifiant.

Exercice 1.66

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{3,75 + u_n}$.

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $[3,75\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3,75 + x}$.

Partie A

1. La fonction f est représentée sur la figure 1.3.
   Tracer la droite d'équation $y = x$, placer sur la figure le terme u_0, puis construire les termes u_1, u_2, u_3.
2. Conjecturer par lecture graphique le sens de variation de la suite (u_n) et le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

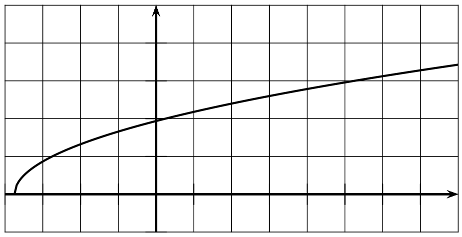


Fig. 1.3

Partie B

1. Justifier que la fonction f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que :
   a) pour tout entier naturel n, $u_n > 2$;
   b) la suite (u_n) est décroissante, en démontrant que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. Justifier que la suite (u_n) a une limite.
4. Déterminer la limite ℓ en justifiant.

Exercice 1.67

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2,5 - \dfrac{1}{u_n}$.

On appelle f la fonction définie par $f(x) = 2,5 - \dfrac{1}{x}$.

Partie A

1. La fonction f est représentée sur la figure 1.4.
   Tracer la droite d'équation $y = x$, placer sur la figure le terme u_0, puis construire les termes u_1, u_2, u_3.
2. Conjecturer par lecture graphique le sens de variation de la suite (u_n) et le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

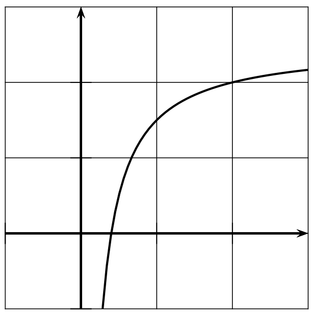


Fig. 1.4

Partie B

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que :
   a) la suite (u_n) est croissante, en démontrant que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$;

b) pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 4$.

3. Justifier que la suite (u_n) a une limite finie.

4. Déterminer la limite ℓ en justifiant.

1.9.d Suite croissante non majorée

Exercice 1.68

Le théorème de convergence (cours 1.11.d) indique que si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge, mais si une suite est croissante et non majorée que se passe-t-il ?

L'objectif de cet exercice est de répondre à cette question et de le démontrer.

1. Quel est le comportement d'une suite (u_n) croissante non majorée lorsque n tend vers $+\infty$?
2. **Démonstration**
   (u_n) est une suite croissante non majorée. Soit un nombre A quelconque.
   Démontrer qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à A.

1.10 Comportement à l'infini d'une suite géométrique

Exercice 1.69

Le but de cet exercice est d'étudier sans justifier le comportement de la suite (q^n) lorsque n tend vers $+\infty$, selon les valeurs de q, à partir de quelques exemples.

1. Conjecturer le comportement des suites définies ci-dessous lorsque n tend vers $+\infty$.

   a) $u_n = (-2)^n$ **b)** $u_n = (-1)^n$ **c)** $u_n = (-0,8)^n$ **d)** $u_n = 0^n$
   e) $u_n = 0,4^n$ **f)** $u_n = 1^n$ **g)** $u_n = 1,3^n$

2. Compléter ci-dessous en conjecturant d'après les résultats précédents. S'il y a un doute ne pas hésiter à essayer avec d'autres valeurs de q que celles du **1.**
   - Si $q \leqslant -1$, alors ....
   - Si $-1 < q < 1$, alors ....
   - Si $q = 1$, alors ....
   - Si $q > 1$, alors ....

Exercice 1.70

L'objectif de cet exercice est de démontrer le comportement de la suite (q^n) lorsque $q > 1$ quand n tend vers $+\infty$. Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir démontrer cette propriété.

La démonstration va se faire en deux étapes.

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
2. En déduire, lorsque $q > 1$, la limite de la suite (q^n) + quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 1.71

Dans le cours, lire la propriété 1.20 page 37, puis déterminer le comportement de chacune des suites définies ci-dessous, lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $u_n = (-0,85)^n$	**2.** $u_n = 1,04^n$	**3.** $u_n = (-1,2)^n$	**4.** $u_n = 0,92^n$
5. $u_n = 0,75 \times 1,3^n$	**6.** $u_n = 1,15^n + 6$	**7.** $u_n = -5 \times 0,7^n$	**8.** $u_n = 0,5^n - 9$
9. $u_n = 2 \times 0,88^n - 1,5$	**10.** $u_n = 0,7 \times 1,6^n + 3,25$		

Exercice 1.72

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 - 0,2^n$.

1. Quel est le sens de variation de cette suite ? Justifier.
2. Déterminer la limite de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Indiquer si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifier.
   Si une suite est croissante alors la limite de cette suite lorsque n tend vers $+\infty$, est $+\infty$.

Exercice 1.73

En 2010, une population d'oiseaux s'élève à 3 000 individus. Cette population diminue chaque année de 5 %, mais il y a 100 naissances chaque année.

On appelle p_n la population de l'année $2010 + n$, ainsi $p_0 = 3\,000$.

1. Avec la calculatrice ou un tableur, conjecturer l'évolution de cette population d'oiseaux à long terme.
   Le but des questions qui suivent est de démontrer ce résultat.
2. **a)** Calculer la population d'oiseaux en 2011, 2012, 2013, en détaillant les calculs.
   b) Justifier que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,95p_n + 100$.
3. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 2\,000$.
   a) Pour tout entier naturel n, calculer u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) Justifier que (u_n) est une suite géométrique et donner son premier terme et sa raison.
   c) Écrire l'expression de u_n en fonction de n.
4. **a)** Écrire l'expression de p_n en fonction de n.
   b) Quelle sera l'évolution de cette population d'oiseaux à long terme ? Justifier.

Exercice 1.74

Un capital de 20 000 € est placé.
On appelle C_n la valeur de ce capital après n années de placement, ainsi $C_0 = 20\,000$.
La valeur de C_n est calculée par l'algorithme ci-contre.

```
i ← 0
C ← 20 000
Pour i allant de 1 à n
    C ← 1,01C + 100
    i ← i + 1
Fin du Pour
```

1. Calculer la valeur du capital après 3 ans. Détailler les calculs.
2. Démontrer par récurrence que : $20\,000 \times 1,01^n \leqslant C_n < C_{n+1}$.
3. Quel est le sens de variation de la suite (C_n) ? Justifier.
4. Quel est la limite de la suite (C_n) lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier.
5. Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la valeur finale de i indique la première année où le capital dépasse 24 000 €.

$i \leftarrow 0$

$C \leftarrow 20\,000$

Tant que ....

    $C \leftarrow$ ....

    $i \leftarrow$ ....

Fin du Tant que

1.11 Approximations de nombres réels

Exercice 1.75 (Méthode de Héron)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. On admet que cette suite converge. Démontrer que sa limite est égale à $\sqrt{2}$.
2. La suite (u_n) permet donc d'obtenir des valeurs approchées fractionnaires ou décimale du nombre $\sqrt{2}$.
   La calculatrice affiche $\sqrt{2}$ avec 9 décimales c'est à dire 9 chiffres après la virgule.
   À partir de quel rang la suite (u_n) permet-elle d'obtenir
   a) 4 décimales exactes ? **b)** 9 décimales exactes ?

On démontre que pour un nombre a positif, la suite définie par $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$, *converge vers* $\sqrt{a}$, *et permet donc de calculer des valeurs approchées de* $\sqrt{a}$.

Cette méthode s'appelle ***la méthode de Héron*** *parce qu'on a trouvé cette méthode dans les écrits du mathématicien grec Héron qui vécut à Alexandrie au premier siècle après J.C.*

Cette méthode était déjà connue auparavant des babyloniens et des égyptiens.

Exercice 1.76 (Approximation de π)

On considère une suite (P_n) de polygones réguliers inscrits dans un cercle de rayon 1.

P_2 est le carré de la figure 1.5.

P_3 est l'octogone régulier (8 côtés) de la figure 1.6.

P_4 est le polygone régulier à 16 côtés de la figure 1.7.

et ainsi de suite P_5 a 32 côtés, P_6 a 64 côtés, c'est à dire qu'on double le nombre de côtés à chaque étape.

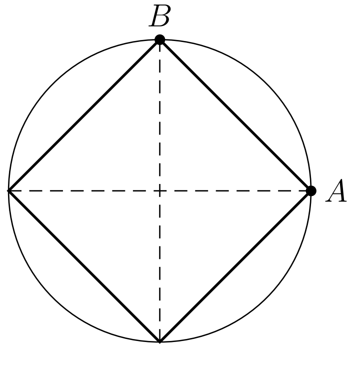


Fig. 1.5

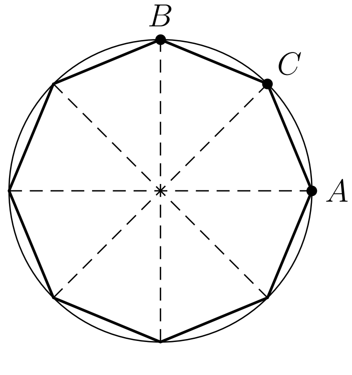


Fig. 1.6

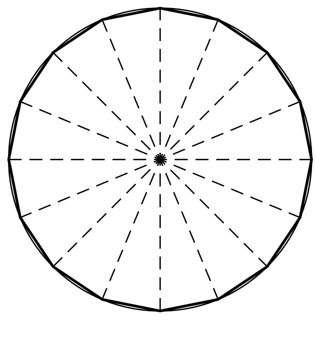


Fig. 1.7

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

- on appelle p_n le périmètre du polygone P_n ;
- on appelle c_n la longueur d'un côté du polygone P_n.

1. Expliquer pourquoi la suite (p_n) des périmètres permet d'obtenir des approximations de π.

2. Calculer la valeur exacte de c_2, c'est à dire AB dans la figure 1.5.

3. Calculer la valeur exacte de c_3, c'est à dire AC ou BC dans la figure 1.6.

4. En utilisant la propriété de Pythagore on démontre que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $c_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}}$. On admettra cette égalité.

a) Vérifier qu'on retrouve bien la valeur de c_3 avec cette égalité.

b) Écrire l'expression de p_n en fonction de n et de c_n.

c) Créer un programme qui calcule $\dfrac{p_n}{2}$ quand on entre la valeur de n, qu'on pourra appeler `APPROXPI`.

d) La calculatrice affiche une valeur approchée du nombre π avec 9 décimales.
À partir de quel rang obtient-on 4 décimales exactes avec le programme précédent ?

Exercice 1.77 (Approximation de π (2))

La suite (S_n) est définie par $S_0 = \sqrt{12}$ et pour tout entier naturel n, $S_{n+1} = S_n + \sqrt{12}\,\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)3^{n+1}}$.

On admet que la suite (S_n) converge vers π.

Pour répondre aux deux questions ci-dessous, on pourra utiliser le module suite de la calculatrice ou un programme.

À partir de quel rang la suite (S_n) permet-elle d'obtenir

1. 4 décimales exactes ? **2.** 8 décimales exactes ?

Exercice 1.78 (Comparaison des vitesses de convergence)

Pour chacune des suites des exercices 1.75 à 1.77, indiquer à partir de quel rang on obtient 4 décimales exactes.

1.12 Exercices de bac

Exercice 1.79 (Bac S, Liban, mai 2013, ex 4)

On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$.

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

   Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 1.80 (Bac S, Métropole-Réunion, juin 2013, ex 4)
Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :
$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$

1. **a)** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. **a)** Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.
   c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \dfrac{S_n}{n^2}$.
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

1.13 Pour réviser

Chapitre du livre n° 3 – Raisonnement par récurrence et suite
Les exercices résolus

- ex 1 p 69 : démonstration par récurrence
- ex 9 p 71 : un peu difficile, on peut laisser
- ex 16 p 73 : suite définie par récurrence, sens de variation, majoration, convergence, calculer la limite
- ex 17 p 47 : démonstration de cours, suite croisssante non majorée

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés pages 463 et 464

- ex 2 p 69 : Sens de variation et récurrence
- ex 10 p 71 : suite géométrique, écrire u_n en fonction de n, limite
- ex 18 p 73 : suite arithmético-géométrique, sens de variation, majoration, convergence, calcul de la limite
- ex 19 p 73 : suite arithmético-géométrique, sens de variation, signe, limite
- ex 21 et 26 p 49 : opérations sur les limites

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 471 et 472

- ex 68 p 79 (QCM) :
- ex 69 p 79 (Vrai/Faux) :
- ex 70 p 79 (Vrai/Faux) :
- ex 71 p 80 : étudier une suite définie par récurrence selon la valeur du premier terme
- ex 72 p 80 : suite définie par récurrence, algorithmique, somme,
- ex 73 p 80 : suite arithmético-géométrique

Autre exercice : ex 46 p 76, limite suite géométrique (correction du a) dans le cours sur fiche).

II Cours

1.1 (1re S) Définition et modes de génération d'une suite numérique.

1.1.a Définition et vocabulaire

Rappel : l'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nul, on dit aussi « ensemble des nombres entiers naturels ».

Définition 1.1

Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. L'image d'un entier naturel n par u est notée $u(n)$ ou u_n.

Vocabulaire

Un nombre n est appelé le *rang* et u_n est appelé *terme* de rang n.

1.1.b Modes de générations d'une suite

Il y deux façons de définir une suite :

- par une relation $u_n = f(n)$, ou relation explicite ;
- par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, ou relation de récurrence.

Exemple 1 (relation $\boldsymbol{u_n = f(n)}$ ou relation explicite) : $u(n) = 50 + 1,5n$ ou $u_n = 50 + 1,5n$

$u_0 = 50 + 1,5 \times 0 = 50$ $u_1 = 50 + 1,5 \times 1 = 51,5$ $u_2 = 50 + 1,5 \times 2 = 53$

Exemple 2 (relation $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$ ou relation de récurrence) : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n+1$

$u_0 = 1$ $u_1 = 2 \times u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ $u_2 = 2 \times u_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$

$u_3 = 2 \times u_2 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$

Définition 1.2

- Une suite où, pour tout entier naturel n, chaque terme u_n est écrit **en fonction de $\boldsymbol{n}$**, c'est à dire $\boldsymbol{u_n = f(n)}$, est une suite définie par une **relation explicite**.
- Une suite où chaque terme est défini **en fonction du précédent**, c'est à dire $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$ est une suite définie **par une relation de récurrence**.

1.1.c Utilisation du tableur pour afficher les termes d'une suite

Relation explicite $u_n = f(n)$

Exemple 1 : $u_n = 50 + 1,5n$

	A	B
1	n	Un
2	0	50
3	1	51,5
4	2	53

Formule dans la cellule B2 : =50+1,5*A2

Relation par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple 2 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

	A	B
1	n	Un
2	0	1
3	1	3
4	2	7

Formule dans la cellule B3 : =2*B2+1

1.1.d Exemples d'algorithmes permettant de calculer un terme de rang donné.

Relation explicite $u_n = f(n)$

Exemple : $u_n = 50 + 1,5n$

Quand on connaît la valeur de n, pour calculer u_n, l'algorithme se réduit à : $\boxed{u \leftarrow 50 + 1,5n}$
et la variable u contient alors la valeur de u_n.

Relation par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

Quand on connaît la valeur de n, pour calculer u_n, l'algorithme doit calculer tous les termes successifs jusqu'à u_n, on utilise donc une boucle Pour.
Dans l'algorithme ci-contre, la valeur de u_n est la valeur finale de la variable u.

$u \leftarrow 1$
Pour k allant de 1 à n
$\quad u \leftarrow 2u + 1$
Fin du Pour

1.1.e Somme de termes successifs d'une suite $u_n = f(n)$ à la calculatrice

Exemple : pour la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, calculons l'arrondi au millième de la somme $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_9$.

TI 82 Advanced ou TI 83 Premium

1. Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [listes]
2. Aller sur `MATH`
3. Sélectionner `5:somme`
4. Appuyer à nouveau sur $\boxed{\text{2nde}}$ [listes]
5. Aller sur `OPS`
6. Sélectionner `5:suite`
7. Compléter ainsi :
   ```
   Expr:1/(N+1)
   Variable:N
   start:3
   end:9
   step:1
   ```
8. Appuyer 2 fois sur $\boxed{\text{entrer}}$
9. On voit alors :
   `somme(suite(1/(N+1),N,3,9,1)`
10. Appuyer à nouveau sur $\boxed{\text{entrer}}$
11. On obtient $\boxed{S \approx 1,096}$.

Modèles plus anciens de TI 82

- Suivre les étapes **1.** à **6.**
- On voit alors : `somme(suite(`
- Compléter ainsi :
  `somme(suite(1/(N+1),N,3,9,1)`
- Appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$
- On obtient $\boxed{S \approx 1,096}$.

1.2 (1re S) Suites arithmétiques.

1.2.a Définition d'une suite arithmétique

Définition 1.3

> Une suite telle que l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r, s'appelle une **suite arithmétique de raison r** .

Relation de récurrence pour une suite arithmétique : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$

Relation explicite (u_n en fonction de n) pour une suite arithmétique

- Si u_0 est le premier terme de la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = u_0 + nr}$;
- si u_p est le premier terme de la suite, pour tout $n \geqslant p$, $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$.

Méthode 1.1 (Comment vérifier qu'une suite est arithmétique ou non ?)

Exemple 1 : $u_n = 3n - 4$

On reconnaît la formule $u_n = u_0 + nr$, avec $u_0 = -4$ et $r = 3$, donc la suite (u_n) est arithmétique.

Exemple 2 : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 5 = u_n + (-5)$

On reconnaît la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$, avec $r = -5$, donc la suite (u_n) est arithmétique.

Exemple 3 : $u_n = n^3$

On calcule les trois premiers termes : $u_0 = 0^3 = 0$ $u_1 = 1^3 = 1$ $u_2 = 2^3 = 8$

On calcule les différences entre termes successifs : $u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ $u_2 - u_1 = 8 - 1 = 7$.

Ces différences ne sont pas égales, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

1.2.b Somme de termes successifs d'une suite arithmétique

Propriété 1.1 (Somme des entiers de 1 à n)

> Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a l'égalité : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Propriété 1.2

> La somme S de termes successifs d'une suite arithmétique est donnée par l'égalité :
> $S = \dfrac{\text{Nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

Exemple 1 : $1 + 2 + 3 + \cdots + 237 = \dfrac{237 \times (237+1)}{2} = \boxed{28\,203}$

Exemple 2 :

La suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

Calculons la somme : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{38}$.

Le 1er terme est : $u_0 = 5$. Calculons le dernier terme : $u_{38} = u_0 + n \times r = 5 + 38 \times 3 = 119$.

Nombre de termes : $1 + 38 = 39$ $S = \dfrac{39 \times (5 + 119)}{2} = \boxed{2\,418}$

1.3 (1re S) Suites géométriques.

1.3.a Définition d'une suite géométrique

Définition 1.4

> Une suite telle que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q, s'appelle une **suite géométrique de raison q** .

Relation de récurrence pour une suite géométrique : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = q \times v_n}$

Relation explicite (u_n en fonction de n) pour une suite géométrique

- si v_0 est le premier terme de la suite : $\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$;
- si v_p est le premier terme de la suite : $\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}}$.

Méthode 1.2 (Comment vérifier qu'une suite est géométrique ou non ?)

Exemple 1 : $v_n = -7 \times 6^n$

On reconnaît la formule $v_n = v_0 \times q^n$, avec $v_0 = -7$ et $q = 6$, donc la suite (v_n) est géométrique.

Exemple 2 : $v_0 = 8$ et $v_{n+1} = 9\, v_n$

On reconnaît la formule de récurrence $v_{n+1} = q \times v_n$, avec $q = 9$, donc la suite (v_n) est géométrique.

Exemple 3 : $u_n = 2^n + 4$

On calcule les trois premiers termes : $v_0 = 2^0 + 4 = 5$ $v_1 = 2^1 + 4 = 6$ $v_2 = 2^2 + 4 = 8$

On calcule les quotients entre termes successifs : $\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{6}{5} = \dfrac{18}{15} = 1,2$ $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{20}{15} \approx 1,3$

Ces quotients ne sont pas égaux, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

1.3.b Somme de termes successifs d'une suite géométrique

Propriété 1.3

Pour tout nombre $q \neq 1$ et pour tout entier naturel n, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Propriété 1.4

La somme S de termes successifs d'une suite géométrique est donnée par l'égalité :

$S = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{Nombre de termes}}}{1 - q}$

Exemple 1 : $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{10} = \dfrac{1 - 5^{11}}{1 - 5} = \dfrac{-48\ 828\ 124}{-4} = \boxed{12\ 207\ 031}$

Exemple 2

La suite u est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 1,06$.

Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{59}$

Nombre de termes : $1 + 59 = 60$ 1er terme : $u_0 = 1\,000$ $S = 1\,000 \times \dfrac{1 - 1,06^{60}}{1 - 1,06} \approx \boxed{34\,029}$

1.3.c Taux d'évolution et suites géométriques

Définition 1.5 (Évolution et taux d'évolution)

Une **évolution** désigne une augmentation ou une diminution d'un taux t, nommé **taux d'évolution**.

Exemple : un prix de 346 € augmente de 8 %.

La valeur initiale est $V_I = 346$€. Le taux d'évolution est : $t = 8\ \% = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$

Calcul de la valeur finale après l'augmentation :

$V_F = 346 + 346 \times 0{,}08 = 346 \times (1 + 0{,}08) = 346 \times 1{,}08 = 373{,}68$

Le calcul détaillé ci-dessus montre que pour calculer la valeur finale on multiplie la valeur initiale par 1,08 qui est le coefficient multiplicateur.

Propriété 1.5

Une valeur initiale V_I évolue d'un taux d'évolution t, et on nomme V_F la valeur finale.

Formule : $V_F = V_I \times (1+t)$ Schéma : $V_I \xrightarrow{\times(1+t)} V_F$

Définition 1.6 (Coefficient multiplicateur)

Pour un taux d'évolution t, on appelle **coefficient multiplicateur** le nombre $1+t$.

Exemples

- Une population de 15 700 habitants a augmenté de 13 %. $t = 0{,}13$
  Calcul de la population après augmentation : $15\,700 \times (1+0,13) = 15\,700 \times 1,13 = \boxed{17\,741}$.
- Une population de 9 300 habitants a baissé de 6 %. $t = -0{,}06$
  Calcul de la population après la baisse :
  $9\,300 \times (1+(-0,06)) = 9\,300 \times (1-0,06) = 9\,300 \times 0,94 = \boxed{8\,742}$.

Évolutions successives de même taux, suites géométriques

Exemple : une population de bactéries s'élève à 90 000 et diminue de 4 % par jour.

Posons $u_0 = 90\,000$ et appelons u_n la population du jour n.

Puisque la population de bactéries diminue de 4 % par jour, cette population est multipliée chaque jour par $1 - 0{,}04 = 0{,}96$.

Par conséquent la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,96.

Propriété 1.6 (Taux d'évolution et suite géométrique)

n est un entier positif. Une quantité subit des évolutions successives de même taux t.
On appelle u_0 la valeur de départ, et u_n la valeur après n évolutions successives.
Alors la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $1+t$.

1.3.d Exemple de suite arithmético-géométrique

Une suite arithmético-géométrique est définie par récurrence sous la forme :
$u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des nombres réels.

Un exemple est étudié ci-dessous.

Énoncé

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 2$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 20$.
   a) Établir une relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire que la suite (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques
   b) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-5} près.

Corrigé

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
$u_1 = 0,9 \times 1 + 2 = \boxed{2,9}$ $\qquad u_2 = 0,9 \times 2,9 + 2 = \boxed{4,61}$.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
$u_1 - u_0 = 2,9 - 1 = 1,9$ $\qquad u_2 - u_1 = 4,61 - 2,9 = 1,71$
donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, par conséquent $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{2,9}{1} = 2,9$ $\qquad \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4,61}{2,9} \approx 1,59$
donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ par conséquent $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.
Remarque
Si $u_{n+1} = au_n + b$, si $a \neq 0$ et si $b \neq 0$, malgré son nom, une suite arithmético-géométrique n'est ni arithmétique ni géométrique.

3. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 20$.
a) Établir une relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire que la suite (v_n) est géométrique et préciser ses caractéristiques.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20 && \text{or } u_{n+1} = 0,9u_n + 2 \\ &= 0,9\,u_n + 2 - 20 \\ &= 0,9\,u_n - 18 && \text{or } \ v_n = u_n - 20 \ \text{ donc } \ u_n = v_n + 20 \\ &= 0,9\,(v_n + 20) - 18 \\ &= 0,9\,v_n + 18 - 18 \\ &= 0,9\,v_n + 18 - 18 \\ &= 0,9\,v_n \end{aligned}$$
On a donc, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,9u_n$,
d'autre part, $v_0 = u_0 - 20 = 1 - 20 = -19$
par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 0,9 et de premier terme : } v_0 = -19}$.
b) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
- v_n en fonction de n :
puisque la suite (v_n) est géométrique, on sait que : $v_n = v_0 \times 0,9^n = \boxed{-19 \times 0,9^n}$.
- u_n en fonction de n : $u_n = v_n + 20 = \boxed{-19 \times 0,9^n + 20}$.

4. Calculer u_{10}. Arrondir à 10^{-5} près.
$u_{10} = -19 \times 0,9^{10} + 20 \approx \boxed{13{,}375\,11}$

1.4 Raisonnement par récurrence

*Le programme précise qu'un élève de terminale S doit **savoir mener un raisonnement par récurrence** et que ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites.*

Propriété 1.7 (Axiome de récurrence)

Pour une propriété (P_n),
Si
- **initialisation :** la propriété (P_0) est vraie ;
- **hérédité :** pour tout entier naturel k, la propriété (P_k) est héréditaire, c'est à dire que si (P_k) est vraie, alors (P_{k+1}) est vraie ;

alors pour tout entier naturel n, la propriété (P_n) est vraie.

Exemple

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

Calculs des premiers termes et conjecture de la formule.

Calculs de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

$n = 0,\ \ u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 1,\ \ u_1 = 1$

$n = 1,\ \ u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 1,\ \ u_2 = 4$

$n = 2,\ \ u_{2+1} = u_2 + 2 \times 2 + 1,\ \ u_3 = 9$

$n = 3,\ \ u_{3+1} = u_3 + 2 \times 3 + 1,\ \ u_4 = 16$

$n = 4,\ \ u_{4+1} = u_4 + 2 \times 4 + 1,\ \ u_5 = 25$

D'après ces valeurs de u_n, il semble que la formule qui donne u_n en fonction de n soit $u_n = n^2$.

On conjecture, c'est à dire on suppose que la formule est $u_n = n^2$.

Démonstration par récurrence

Appelons (P_n) la propriété : $u_n = n^2$, et démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la propriété (P_n) est vraie.

Initialisation : vérifions que la propriété est vraie pour $n = 0$

On a : $u_0 = 0$ d'après l'énoncé, donc on a bien $u_0 = 0^2$, par conséquent la propriété (P_0) est vraie.

Hérédité :

supposons que pour un entier naturel on ait $u_k = k^2$ et démontrons qu'alors $u_{k+1} = (k+1)^2$

$u_{k+1} = u_k + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

Nous avons prouvé que si $u_k = k^2$ alors $u_{k+1} = (k+1)^2$, autrement dit la propriété (P_k) est héréditaire.

Conclusion :

Nous avons prouvé que

- la propriété (P_0) est vraie ;
- pour tout entier naturel k, la propriété (P_k) est héréditaire.

Donc, d'après l'axiome de récurrence, la propriété (P_n) est vraie pour tout entier naturel n.

1.5 (1re S) Sens de variation d'une suite numérique.

1.5.a Définition

Définition 1.7

- Dire qu'une suite u est **croissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- Dire qu'une suite u est **décroissante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- Dire qu'une suite u est **constante** signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

1.5.b Méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite

Les deux premières méthodes peuvent s'appliquer à tous les types de suites.

Utiliser la définition

On cherche à démontrer selon le cas que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$ ou $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite u est **croissante**.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite u est **décroissante**.

Étudier le sens de variation d'une fonction

Cette méthode n'est valable que pour les suites où u_n est défini en fonction de n $(u_n = f(n))$.

Une fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour pour tout entier naturel $u_n = f(n)$.
- Si la fonction f est **croissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite u est **croissante**.
- Si la fonction f est **décroissante** sur $[0\ ;\ +\infty[$, alors la suite u est **décroissante**.

1.5.c Exemple

Sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + n$

Première méthode : signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2$

$2n + 2 \geqslant 0 \iff 2n \geqslant -2 \iff n \geqslant -1$

Or n est entier naturel donc $n \geqslant 0$, donc $n \geqslant -1$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$,

donc la $\boxed{\text{suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

Deuxième méthode : sens de variation de f telle $u_n = f(n)$

$u_n = n^2 + n$ donc $f(x) = x^2 + x$

$f'(x) = 2x + 1$

$2x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\dfrac{1}{2}$

donc la fonction f est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, donc la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$,

donc la $\boxed{\text{suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

1.5.d Sens de variation des suites arithmétiques et géométriques

Propriété 1.8

- Une suite arithmétique de raison positive est croissante.
- Une suite arithmétique de raison négative est décroissante.

Propriété 1.9

- Si $q < 0$ la suite (q^n) n'est ni croissante, ni décroissante.
- Si $q = 0$ la suite (q^n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ la suite (q^n) est décroissante.
- Si $q = 1$ la suite (q^n) est constante.
- Si $q > 1$ la suite (q^n) est croissante.

Exemples

$u_n = 1,3^n$ $\quad 1,3 > 1$, donc la suite $(1,3^n)$ est croissante.

$u_n = 0,75^n$ $\quad 0 < 0,75 < 1$, donc la suite $(0,75^n)$ est décroissante.

$u_n = -3 \times 0,5^n$ $\quad 0 < 0,5 < 1$, donc la suite $(0,5^n)$ est décroissante,
et comme -3 est négatif, la suite $(-3 \times 0,5^n)$ est croissante.

$u_n = (-6)^n$ $\quad -6 < 0$, donc la suite $((-6)^n)$ n'est ni croissante, ni décroissante.

1.6 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 1.8

Dire qu'une suite est majorée signifie qu'il existe un nombre réel M tel que tous les termes de cette suite sont inférieurs ou égaux à M.

Définition 1.9

Dire qu'une suite est minorée signifie qu'il existe un nombre réel m tel que tous les termes de cette suite sont supérieurs ou égaux à m.

Définition 1.10

Dire qu'une suite est bornée signifie que cette suite est majorée et minorée.

1.7 Limite finie ou infinie d'une suite

1.7.a Définitions et exemples

Définition 1.11 (Limite finie)

Dire qu'une suite (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$,
signifie que
tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Définition 1.12 (Limite $+\infty$)

Dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$
signifie que : tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Vocabulaire : convergente, divergente

Une suite **convergente** est une suite qui a une limite finie ℓ (voir définition plus haut).

Une suite **divergente** est une suite qui n'est pas convergente, c'est à dire une suite qui tend vers l'infini ou une suite qui n'a pas de limite.

Exemple

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, on obtient les valeurs suivantes :

$u_1 = 6 \quad u_2 = 5,5 \quad u_3 \approx 5,33 \quad u_5 = 5,2 \quad u_{10} = 5,1 \quad u_{50} = 5,02 \quad u_{200} \approx 5,005 \quad u_{500} \approx 5,002$

Il semble bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 5$.

Dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 5$ signifie que si je prends r un nombre positif quelconque, on peut toujours déterminer un rang N à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]5 - r\ ;\ 5 + r[$.

Prenons d'abord comme exemple $r = 0,001$.

L'intervalle $]5 - 0,001\ ;\ 5 + 0,001[$ est l'intervalle $]4,999\ ;\ 5,001[$.

À partir de quel rang N toutes les valeurs $5 + \dfrac{1}{n}$ sont-elles dans l'intervalle $]4,999\ ;\ 5,001[$?

À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, on constate que ce rang est $N = 1\,000$.

Démontrons le.
Si $n > 1\,000$, alors $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1\,000}$ donc $0 < 5 + \dfrac{1}{n} < 5 + \dfrac{1}{1\,000}$ c'est à dire $5 < u_n < 5,001$.
Autrement dit nous avons prouvé qu'à partir du rang 1 001 toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]5 - 0,001\ ;\ 5 + 0,001[$.

Considérons maintenant r un nombre strictement positif.
À partir de quel rang N toutes les valeurs $5 + \dfrac{1}{n}$ sont-elles dans l'intervalle $]5 - r\ ;\ 5 + r[$. ?
On sait que $5 + \dfrac{1}{n} > 5$, donc il suffit que $\dfrac{1}{n} < r$ ce qui équivaut à $n > \dfrac{1}{r}$.
Si $n > \dfrac{1}{r}$, alors $0 < \dfrac{1}{n} < r$ donc $0 < 5 + \dfrac{1}{n} < 5 + r$ c'est à dire $5 < u_n < 5 + r$.
Le nombre $\dfrac{1}{r}$ n'est pas forcément entier, donc j'appelle N le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{1}{r}$.
Autrement dit nous avons prouvé qu'à partir du rang N toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]5 - r\ ;\ 5 + r[$.

1.8 Limite d'une suite et algorithmique – Seuil

Le programme indique que, dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante u_n et un nombre réel A, un élève de terminale S doit savoir déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.

Vocabulaire : le nombre A est ainsi un ***seuil*** à franchir.

Énoncé

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 7n^3 + 6n + 8$.

1. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

2. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite de cette suite ?

3. Écrire un algorithme qui permet à partir d'un nombre A de déterminer le rang n à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, puis programmer cet algorithme, et le tester.

Corrigé

1. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
- Justifions d'abord que la fonction f définie par $f(x) = 7x^3 + 6x + 8$ est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
  $f'(x) = 7 \times 3x^2 + 6 \times 1 + 0 = 21x^2 + 6$, or, pour tout réel x, x^2 est positif,
  donc $21x^2$ est positif, donc $21x^2 + 6$ est positif.
  Comme sa dérivée f' est positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$, et donc aussi sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- Puisque $u_n = f(n)$ et puisque la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$,
  $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

2. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, quelle semble être la limite de cette suite ?
On calcule par exemple : $u_{10} = 7\,068$ $\quad u_{50} = 875\,308$ $\quad u_{100} = 7\,000\,608$.
Il semble que la limite de (u_n) soit $\boxed{+\infty}$.

3. Écrire un algorithme qui permet à partir d'un nombre A de déterminer le rang n à partir duquel toutes les valeurs u_n sont dans l'intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, puis programmer cet algorithme, et le tester.

Algorithme et programme en Python 3.

D'après la définition 1.12, dire qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ signifie que pour un nombre réel A, à partir d'un certain rang n on a : $u_n \in\ ]A\ ;\ +\infty[$, autrement dit $u_n > A$.

Si de plus la suite (u_n) est croissante, dès qu'on a trouvé une valeur de n telle que $u_n > A$, on sait que tous les termes suivants seront eux aussi supérieurs à A.

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n > A$, pour cela on compare u_0 et A, puis u_1 et A, puis u_2 et A, et on continue tant que $u_k \leqslant A$.

Étant donné cette suite croissante (u_n) et un nombre réel A,
on détermine le rang à partir duquel u_n est supérieur à A à l'aide de l'algorithme ci-dessous où : **la valeur finale de $\boldsymbol{n}$ est le rang $\boldsymbol{n}$ à partir duquel $\boldsymbol{u_n > A}$**.

Algorithme	`Programme en python3`
	`def seuil(A):`
$n \leftarrow 0$	`    n=0`
$u \leftarrow 8$	`    u=8`
Tant que $u \leqslant A$	`    while(u<=A):`
$n \leftarrow n+1$	`        n=n+1`
$u \leftarrow 7n^3+6n+8$	`        u=7*n**3+6*n+8`
Fin du Tant que	
	`    return n`

Test du programme.

J'ai calculé précédemment que : $u_{10} = 7\,068$. On peut calculer aussi : $u_{11} = 9\,391$.

Puisque la suite (u_n) est croissante, je constate donc que le rang n à partir duquel u_n est supérieur à $9\,000$ est 11.

Dans la console Python, je saisis `seuil(9000)`, je valide et on voit :

```
In[1]: seuil(9000)
Out[1]: 11
```

Ce programme semble donc s'exécuter correctement.

1.9 Suites de référence

Propriété 1.10 (admise)

- Les suites (n), (n^2), (n^3), $(\sqrt{n})$, ont pour limite $+\infty$.
- Les suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, ont pour limite 0.

1.10 Opérations sur les limites

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.

Les propriétés à connaître sont résumées par les 3 tableaux ci-dessous.

Précisions concernant ces tableaux

- ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.

- Pour obtenir le signe concernant le produit ou le quotient, il faut appliquer la règle des signes.
- FI signifie *forme indéterminée*, c'est à dire qu'on ne peut pas conclure.

Propriété 1.11 (Limite d'une somme)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Propriété 1.12 (Limite d'un produit)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	$\ell\times\ell'$	∞	∞	FI

Propriété 1.13 (Limite d'un quotient)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$	ℓ	0	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	0	∞	0	$\ell'\neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	FI	∞	∞	FI

1.11 Limites de suites et comparaison

1.11.a Limite infinie et comparaison

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 1.14

Pour deux suites (u_n) et (v_n),
- Si à partir d'un certain rang $(u_n) \leqslant (v_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty$.
- Si à partir d'un certain rang $(u_n) \geqslant (v_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = -\infty$.

Démonstration du premier point (à connaître)

Sachant que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, nous voulons démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Nous voulons donc démontrer que tout intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang.

On considère donc un nombre A quelconque et nous allons prouver qu'à partir d'un certain rang $v_n > A$.

On sait qu'à partir d'un certain rang N_1, on a $u_n \leqslant v_n$ c'est à dire $v_n \geqslant u_n$.

D'autre part, comme (u_n) tend vers $+\infty$, on sait aussi qu'à partir d'un certain rang N_2, on a $u_n > A$.

Appelons alors N le plus grand des deux rangs N_1 et N_2.

On peut alors dire qu'à partir de ce rang N on a : $v_n \geqslant u_n$ et $u_n > A$.

Par conséquent, à partir de ce rang N on a : $v_n > A$.

1.11.b Théorème des gendarmes

Propriété 1.15 (admis)

Pour trois suites (u_n), (v_n), (w_n),
si
- à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;
- les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite ℓ ;

alors la suite (v_n) tend vers ℓ.

1.11.c Suite croissante convergente

Propriété 1.16

Si une suite est croissante et admet pour limite ℓ ,
alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ .

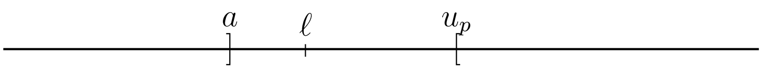
Démonstration

Soit une suite (u_n) croissante et qui tend vers une limite ℓ.

Nous voulons démontrer qu'alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à ℓ.

Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe un rang p tel que $u_p > \ell$ et démontrons que c'est impossible.

Considérons alors un nombre a tel que $a < \ell$, ainsi l'intervalle $]a\ ;\ u_p[$ est un intervalle ouvert qui contient ℓ.



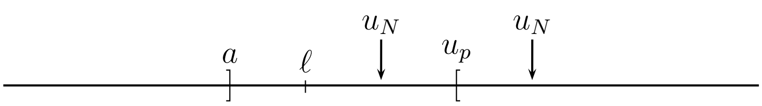
Puisque la suite (u_n) tend vers ℓ, on sait donc qu'à partir d'un certain rang r tous les termes (u_n) sont dans l'intervalle $]a\ ;\ u_p[$.

Appelons alors N le plus grand des deux rangs p et r.

On a donc $N \geqslant r$ donc $u_N \in]a\ ;\ u_p[$, c'est à dire $a < u_N < u_p$.

D'autre part, $N \geqslant p$, c'est à dire $p \leqslant N$ et comme la suite (u_n) est croissante on a : $u_p \leqslant u_N$.

On obtient donc : $a < u_N < u_p \leqslant u_N$ ce qui est impossible.



Donc il n'existe pas de rang p tel que $u_p > \ell$ autrement dit pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$

Remarque – Démonstration par l'absurde

La démonstration précédente utilise le principe ci-dessous.

On veut démontrer une propriété qui dit que si une affirmation A est vraie alors l'affirmation B est vraie.

On suppose que l'affirmation A est vraie et que l'affirmation B est fausse, et on démontre que c'est impossible.

Cela démontre que la propriété (si A alors B) est vraie.

On appelle cela une *démonstration par l'absurde*.

1.11.d Théorème de convergence

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir utiliser la propriété ci-dessous.

Propriété 1.17 (admise)

- Si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors cette suite converge.

Remarques

- Ce théorème est admis parce que sa démonstration n'est pas du tout de niveau de terminale S.
- Il faut bien comprendre que si une suite est croissante et majorée, ce théorème permet d'affirmer que cette suite a une limite, mais **ne donne pas la valeur de sa limite.**
- Ce théorème est très important et très utile, notamment pour justifier que certaines suites définies par récurrence sont convergentes.

1.11.e Suite croissante non majorée

La propriété ci-dessus indique que si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge, mais si une suite est croissante et non majorée que se passe-t-il ?

La propriété ci-dessous est la réponse à cette question.

Propriété 1.18

- Si une suite est croissante et non majorée, alors cette suite a pour limite $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et non minorée, alors cette suite a pour limite $-\infty$.

Démonstration du premiers cas

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

Dire que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que pour tout réel A, il existe un rang N à partir duquel tous les termes u_n sont supérieurs à A.

Considérons donc un nombre A quelconque.

Puisque la suite (u_n) est non majorée, cela implique que A ne peut pas être un majorant de cette suite, par conséquent, il existe un rang N tel que $u_N \geqslant A$.

Comme la suite (u_n) est croissante, tous les termes u_n à partir du rang N sont supérieurs ou égaux à u_N, donc supérieurs ou égaux à A.

Donc la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

1.12 Comportement à l'infini d'une suite géométrique

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 1.19

Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Démonstration (à connaître)

Démontrons cette propriété par récurrence.

Pour tout entier naturel n, on appelle $P(n)$ la propriété $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Intialisation.

On a : $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$ par conséquent on a bien $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$.

Autrement dit $P(0)$ est vraie.

Hérédité.

Pour un entier naturel k, supposons que $P(k)$ soit vraie, c'est à dire $(1+a)^k \geqslant 1+ka$.

Est-ce que $P(k+1)$ est vraie, c'est à dire est-ce que l'inégalité $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$ est vraie ?

Si : $(1+a)^k \geqslant 1+ka$, on peut multiplier les deux membres de cette inégalité par $1+a$ qui est positif

Donc : $(1+a)^k \times (1+a) \geqslant (1+ka)\times(1+a)$

Donc : $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a+ka+ka^2$

Donc : $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a+ka^2$,

or ka^2 est positif donc $1+(k+1)a+ka^2 \geqslant 1+(k+1)a$

Donc : $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)a$

Conclusion.

Nous avons prouvé que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

Par conséquent pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie.

Propriété 1.20 (Comportement à l'infini de la suite (q^n))

Soit q un nombre réel.

- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = 0$.
- Si $q = 1$, alors pour tout entier naturel n, $q^n = 1$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = +\infty$.

Le programme précise qu'un élève de terminale S doit savoir démontrer la propriété ci-dessus lorsque $q > 1$.

Démonstration dans le cas où $q > 1$ (à connaître)

Démontrons que si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = +\infty$.

Si $q > 1$, nous pouvons écrire $q = 1+a$ avec $a > 0$.

Ainsi : $q^n = (1+a)^n$ et nous savons, par la propriété précédente que $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$, donc, puisque a est positif $\lim\limits_{n\to+\infty}(an) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$.

Nous savons maintenant que $(1+a)^n \geqslant 1+na$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$,

donc, d'après le théorème de comparaison des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}((1+a)^n) = +\infty$,

c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty}(q^n) = +\infty$.