Chapitre 2

Probabilités conditionnelles

I Exercices

2.1 Probabilité, intersection, réunion, arbre

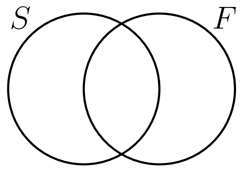
Exercice 2.1

Dans un lycée on donne les effectifs suivants : 1000 élèves en tout, 400 élèves en seconde, 250 élèves en première. Parmi les élèves de seconde, 220 élèves sont des filles, parmi les élèves de première, 120 élèves sont des filles, parmi les élèves de terminale, 160 élèves sont des garçons.

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Secondes	Premières	Terminales	Total
Filles				
Garçons				
Total				

2. Compléter le schéma ci-dessous avec des effectifs. Le disque de gauche représente l'ensemble des élèves de seconde, et le disque de droite représente l'ensemble des filles.



3. On interroge un élève au hasard. On définit les événements suivants :
- S « l'élève interrogé est en seconde » ;
- F « l'élève interrogé est une fille » ;
- P « l'élève interrogé est en première ».

a) Quel est l'événement $\overline{F}$, c'est à dire l'événement contraire de F ?

b) Calculer les probabilités suivantes : $p(F)$, $p(\overline{F})$, $p(F) + p(\overline{F})$

c) Décrire par une phrase l'événement $S \cap F$, c'est à dire l'événement S et F.

d) Calculer la probabilité $p(S \cap F)$

e) Décrire par une phrase l'événement $S \cup F$, c'est à dire l'événement S ou F (« ou » veut dire l'un ou l'autre ou les deux).

f) Calculer la probabilité $p(S \cup F)$

g) Est ce que l'égalité $p(S \cup F) = p(S) + p(F)$ est vraie ? Vérifier par des calculs. Si la réponse est non, corriger la formule.

h) Calculer les probabilités $p(P)$, $p(S \cap P)$, $p(S \cup P)$.

4. Compléter le tableau de probabilités ci-dessous.

	S	P	T	Total
F				
G				
Total				

5. Représenter la situation de l'exercice par un arbre.

Exercice 2.2

Un bureau de poste possède deux guichets A et B dont l'un des deux au moins est ouvert.

On note :
- C l'événement « le guichet A est ouvert »
- D l'événement « le guichet B est ouvert »

Une étude statistique a montré que $p(\text{C}) = 0,8$, $p(\text{D}) = 0,5$.

Calculer la probabilité que les deux guichets soient ouverts à la fois.

2.2 Expériences identiques et indépendantes, espérance, loi binomiale.

Exercice 2.3

On a effectué une enquête sur les destinations de vacances. Quelle que soit la personne interrogée, la probabilité
- qu'elle choisisse des vacances en bord de mer (M) est égale à 0,6 ;
- qu'elle choisisse une randonnée en montagne (R) est égale à 0,3 ;
- sinon elle reste à son domicile (D).

On rencontre successivement deux personnes interrogées durant cette enquête.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.

2. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée sur les deux choisisse des vacances en bord de mer.

Exercice 2.4

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi le bord de mer comme destination dans l'exercice 2.3

1. Déterminer la loi de probabilité de X (c'est à dire dresser un tableau comportant les différentes valeurs possibles de X et les probabilités correspondantes).

2. Calculer l'espérance de X.

3. Que signifie le résultat précédent si on renouvelle cette expérience aléatoire un grand nombre de fois (interroger 1000 fois 2 personnes par exemple) ?

Exercice 2.5

Dans une usine, l'énergie électrique est fournie par deux générateurs. On suppose que chacun des générateurs tombe en panne avec une probabilité de 0,005 et ceci d'une façon indépendante de l'autre générateur.

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un générateur qui fonctionne ?

Exercice 2.6

Un téléopérateur téléphone successivement à trois personnes susceptibles d'être intéressées par sa proposition. Quelle que soit la personne appelée, la probabilité qu'elle soit intéressée est 0,6.

On note A l'événement « la personne appelée est intéressée » et $\overline{A}$ l'événement contraire.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de personnes intéressées.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance de X.

Exercice 2.7

Une entreprise reçoit des boîtes de guirlandes électriques dont trois sur dix sont des guirlandes pour l'extérieur. Ces boîtes sont très nombreuses et mélangées. Un employé vérifie au hasard 4 boîtes. On assimile ce choix à quatre tirages identiques et indépendants.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes contenant des guirlandes pour extérieur.

1. Quelle la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Effectuer les calculs suivants en utilisant la formule du cours. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.
   a) Calculer la probabilité que les quatre boîtes vérifiées contiennent des guirlandes pour extérieur.
   b) Calculer la probabilité que deux boîtes sur les quatre contiennent des guirlandes pour extérieur.
   c) Calculer la probabilité que au moins une boîte sur les quatre contiennent des guirlandes pour extérieur.
   d) Calculer la probabilité que au plus deux boîtes sur les quatre contiennent des guirlandes pour extérieur.
3. Vérifier les résultats du 1. à la calculatrice en utilisant la commande `binomFdp` ou `binomFRép` (voir le paragraphe 2.4.d du cours).

Exercice 2.8

Un tireur a une probabilité d'atteindre sa cible égale à 0,7. Il tire dix fois de suite. On considère ces tirs comme des épreuves identiques et indépendantes. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirs qui atteignent la cible.

1. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 6 fois.
2. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible au plus 3 fois.
3. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible plus de 5 fois.

2.3 Probabilité conditionnelle

Exercice 2.9

Une entreprise fait fabriquer 1000 pièces industrielles par deux usines A et B. L'usine A a produit 400 pièces dont 50 ont un défaut, et l'usine B a produit 600 pièces dont 60 ont un défaut.

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant.

	Avec défaut	Sans défaut	Total
Usine A			
Usine B			
Total			

2. On choisit une pièce au hasard parmi les 1000 pièces produites. On définit les événements suivants :
- A « la pièce choisie sort de l'usine A » ;
- B « la pièce choisie sort de l'usine B » ;
- D « la pièce choisie a un défaut ».

Pour les questions (a) à (f), les probabilités seront données sous forme décimale, sans arrondir.

a) On veut comparer les performances des deux usines. Quelle usine a la moins bonne probabilité de défaut ? Justifier en détaillant les calculs.

b) Calculer $p(A)$, $p(B)$, $p(D)$.

c) Décrire par une phrase les événements $A \cap D$ et $B \cap D$.

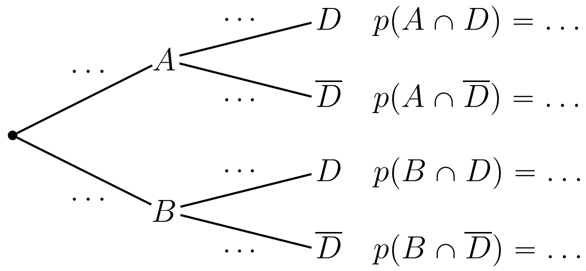
d) Calculer $p(A \cap D)$, $p(B \cap D)$, $\dfrac{p(A \cap D)}{p(A)}$, $\dfrac{p(B \cap D)}{p(B)}$.

e) Une pièce est choisie parmi les pièces de l'usine A. Calculer la probabilité que cette pièce ait un défaut. Cette probabilité s'appelle **la probabilité conditionnelle de D sachant A et s'écrit $p_A(D)$.**

f) La probabilité $p_A(D)$ calculée au (e) est égale à une des probabilités calculées en (d).

Laquelle ? $\boxed{p_A(D) = \qquad\qquad}$

3. Compléter cet arbre pondéré par des probabilités :



Exercice 2.10

Selon une enquête réalisée pour un site Internet, la proportion de gauchers en France serait de 12,7 % et parmi les gauchers il y aurait 6 hommes pour 4 femmes.

On choisit une personne au hasard en France.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit droitière.
3. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme gauchère.

Exercice 2.11

Dans un lycée, une enquête a montré que 95 % des lycéens ont un téléphone portable. Parmi eux, 25 % ont une connexion Internet associée à leur téléphone portable.

On choisit un élève au hasard dans ce lycée.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que l'élève choisi ait un téléphone portable et pas de connexion Internet associée.

Exercice 2.12

Une enquête parmi des élèves de premières et terminales ES indique que 60 % des élèves reconnaissent aimer les sciences économiques et sociales, 45 % aimer les mathématiques, 50 % aimer les sciences économiques et sociales mais pas les mathématiques.

On interroge au hasard un élève concerné par cette enquête.

On note :

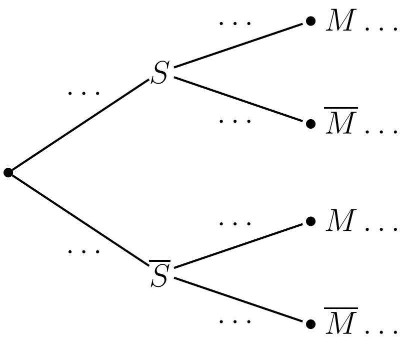
S l'événement « l'élève interrogé aime les sciences économiques et sociales »

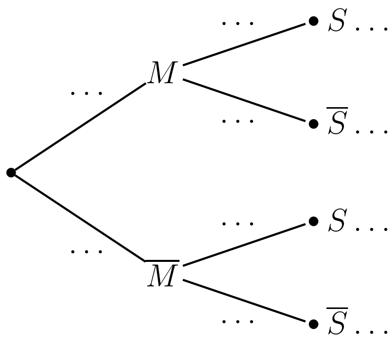
M l'événement « l'élève interrogé aime les mathématiques »

Répondre aux questions suivantes en complétant le tableau et les arbres pondérés ci-dessous selon les besoins. Si nécessaire, arrondir au millième près.

1. Déterminer
   a) la probabilité que cet élève n'aime pas les mathématiques ;
   b) la probabilité que cet élève aime les mathématiques mais pas les sciences économiques et sociales ;
   c) la probabilité que cet élève aime les sciences économiques et sociales sachant qu'il aime les mathématiques ;
2. Pour quelles questions a-t-on utilisé
   le tableau ? .... ; un arbre pondéré ? .... lequel ? ....

	M	$\overline{M}$	Total
S			
$\overline{S}$			
Total			





2.4 Partition de l'univers – Formule des probabilités totales

Exercice 2.13

Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.

On choisit au hasard un candidat qui s'est présenté aux épreuves.

1. Tracer un arbre pondéré et un tableau de probabilité qui seront complétés au fur et à mesure.
2. Traduire les trois données sous forme de probabilité.
3. Calculer la probabilité que le candidat choisi soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire.
4. Calculer la probabilité que le candidat choisi soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire.
5. Calculer la probabilité que le candidat choisi soit engagé.
6. Sachant que le candidat choisi a été engagé, calculer la probabilité que ce soit un garçon. Arrondir à 0,01 près.

Exercice 2.14

À la cafétéria, dans la vitrine pâtisserie :

- 60 % des gâteaux sont à base de crème ;
- parmi ceux qui sont à base de crème, 30 % ont aussi des fruits ;
- parmi les gâteaux qui n'ont pas de crème, 80 % ont des fruits.

On prend un gâteau au hasard.

1. Montrer que la probabilité d'avoir un gâteau avec des fruits est égale à 0,50.
2. a) Le gâteau pris au hasard comporte des fruits. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?

   b) Le gâteau pris au hasard ne comporte pas de fruits. Quelle est la probabilité qu'il soit à base de crème ?

Exercice 2.15

Dans l'ensemble des bovins d'un pays, on estime que 7 % sont atteint d'une maladie.

On effectue un test de dépistage et on sait que

- quand un animal est malade, le test est positif dans 87 % des cas ;
- quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 98 % des cas.

On choisit un animal au hasard dans l'ensemble des bovins de ce pays. Calculer la probabilité qu'un bovin soit malade sachant qu'il a un test positif. Arrondir à 10^{-3} près.

Exercice 2.16

Dans une entreprise, on utilise des pièces venant de deux usines A et B. On sait que : 75 % des pièces viennent de l'usine A, 3 % des pièces produites dans l'usine A ont un défaut, 7 % de l'ensemble des pièces produites ont un défaut. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des pièces.

On note p la probabilité qu'une pièce produites dans l'usine B ait un défaut, et

- A l'événement « la pièce prélevée au hasard provient de l'usine A » ;
- D l'événement « la pièce prélevée au hasard a un défaut ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur de p en justifiant.

Exercice 2.17

Un laboratoire pharmaceutique propose un test de dépistage pour une maladie.

On désigne par x la proportion de personnes atteintes de cette maladie dans la population.

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,98$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,002$.

On note M l'événement « la personne choisie est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,9$.

   À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Exercice 2.18

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} *près.* Lors d'une enquête réalisée auprès d'élèves de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus, 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement « l'élève choisi fume » et $p(A)$ la probabilité de cet événement. On note F l'événement « l'élève choisi est une fille ».

   Quelle est la probabilité que l'élève choisi au hasard :

   a) soit un garçon ?

   b) soit une fille qui fume ?

   c) soit un garçon qui fume ?
2. Déduisez des questions précédentes, en le justifiant, que $p(A) = 0,36$.
3. L'enquête permet de savoir que :
   - parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
   - parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.

   On note B l'événement « l'élève choisi a des parents fumeurs ».

   a) Calculer les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(\overline{A} \cap B)$.

   b) Déduisez en $p(B)$.

   c) Calculer $p_B(A)$ la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

   d) Calculer $p_{\overline{B}}(A)$ la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

2.5 Loi de probabilité et espérance

Exercice 2.19

Une usine fabrique des moteurs. Chaque moteur est testé en fin de fabrication. Si le test est positif, le moteur est acheminé vers le client ; si le test est négatif, le moteur retourne en usine, où il est réparé, puis testé une seconde fois. Si, cette fois le test est positif, le moteur part chez le client mais si le test est négatif, le moteur est définitivement écarté et détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 85 % des moteurs neufs sortis directement des chaînes de fabrication mais que, parmi les moteurs révisés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succés.

1. On choisit un moteur au hasard dans la chaîne de fabrication.

   a) Construire un arbre de probabilité illustrant les différents cas qui peuvent se présenter pour ce moteur.

b) Calculer la probabilité associée à chaque chemin de cet arbre.

2. La fabrication d'un moteur revient à 6 000 € auxquels il faut ajouter 1 000 € si le moteur est révisé. Un moteur est facturé au client 10 000 €. On appelle X la variable aléatoire égale au gain pour l'entreprise dans les différents cas (gain éventuellement négatif).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance de X.

c) Quel gain l'entreprise peut-elle espérer pour 10 000 moteurs fabriquées ?

Exercice 2.20

Un magasin vend des salons de jardin.

Une enquête statistique a montré que :

- 10 % des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table ;
- parmi les personnes qui achètent une table, 80 % achètent un lot de chaises ;
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10 % achètent un lot de chaises.

Une personne entre dans le magasin.

On note :

- T l'événement « La personne achète une table » ;
- C l'événement « La personne achète un lot de chaises » ;

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau la situation décrite ci-dessus.

2. a) Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à 0,17.

b) Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a acheté un lot de chaises ? Arrondir au millième près.

3. Le bénéfice réalisé par table vendue est de 50 € et on appelle b le bénéfice en euros réalisé par lot de chaises.

On veut calculer le montant du bénéfice b pour réaliser en moyenne un bénéfice de 12 € par personne entrant dans le magasin.

a) On appelle X la variable aléatoire égale au montant du bénéfice réalisé par personne entrant dans le magasin.

Déterminer la loi de probabilité de X, en complétant le tableau suivant.

Montant X du bénéfice par client	0	50	b	$50+b$	Total
Probabilité					

b) Calculer l'espérance de X en fonction de b.

c) Calculer le bénéfice b pour réaliser en moyenne un bénéfice de 12 € par personne entrant dans le magasin.

2.6 Indépendance – Tirages successifs dans une urne

Exercice 2.21

L'objectif de cet exercice est de préciser ce que signifie des événements indépendants en probabilité.

Dans les ordinateurs fabriqués par une usine, 60 % sont du modèle A et 40 % du modèle B.

On sait que 5 % des ordinateurs du modèle A ont un défaut.

On choisit un ordinateur au hasard et on appelle

- A l'événement « L'ordinateur choisi est du modèle A. »
- D l'événement « L'ordinateur choisi a un défaut. »

1. **1[er] cas :** 10 % des ordinateurs du modèle B ont un défaut.
   a) Sans justifier, les événements A et D semblent-ils indépendants ?
   b) Indiquer sans justifier les probabilités $p(A)$, $p_A(D)$ et $p_B(D)$.
   c) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   d) Calculer $p(A \cap D)$.
   e) Calculer $p(D)$.
   f) On dit que
   $\boxed{\text{les événements A et D sont indépendants si et seulement si } p(A \cap D) = p(A) \times p(D)}$.
   Vérifier par un calcul si les événements A et D sont indépendants ou non.
   g) Quand deux événements A et D sont indépendants on peut démontrer que $\boxed{p_A(D) = p(D)}$ ce qui voudrait dire ici que la probabilité qu'un ordinateur ait un défaut sachant qu'il est du modèle A, est la même que la probabilité qu'un ordinateur ait un défaut.
   Cette égalité est-elle vraie ici ?
2. **2[e] cas :** 5 % des ordinateurs du modèle B ont un défaut.
   a) Indiquer sans justifier les probabilités $p(A)$, $p_A(D)$ et $p_B(D)$.
   b) Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
   c) Calculer $p(A \cap D)$.
   d) Calculer $p(D)$.
   e) Les événements A et D sont-ils indépendants ? Justifier.

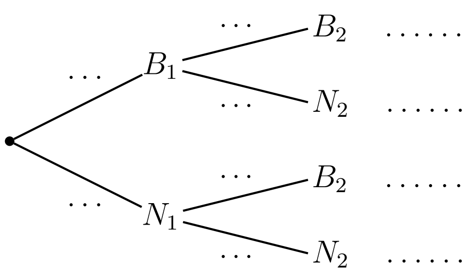
Exercice 2.22 (Tirages successifs dans une urne, sans remise)

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On prend au hasard une boule, on ne la remet pas dans l'urne puis on prend à nouveau une boule au hasard. On appelle cela *deux tirages successifs sans remise.*

On note les événements

- B_1 « Obtenir une boule blanche au 1[er] tirage »
- N_1 « Obtenir une boule noire au 1[er] tirage »
- B_2 « Obtenir une boule blanche au 2[e] tirage »
- N_2 « Obtenir une boule noire au 2[e] tirage »

On pourra utiliser l'arbre et le tableau ci-dessous pour répondre au questions qui suivent.



1. Sans justifier, indiquer si les événements B_1 et B_2 semblent indépendants.
2. Calculer les probabilités des événements B_1, $B_1 \cap B_2$, B_2, puis calculer $p(B_1) \times p(B_2)$
3. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 2.23 (Tirages successifs dans une urne, avec remise)

Reprendre l'exercice précédent avec cette fois deux tirages successifs avec remise (après le premier tirage, on remet la boule dans l'urne avant d'effectuer le deuxième tirage).

Exercice 2.24 (Tirages successifs dans une urne, sans remise, avec des effectifs importants)
Une urne contient 1000 boules, 400 blanches et 600 noires. On effectue au hasard deux tirages successifs sans remise.

Les événements sont notés comme dans l'exercice 2.22.

1. Calculer les probabilités des événements B_1, $B_1 \cap B_2$, B_2, puis calculer $p(B_1) \times p(B_2)$
2. Comparer $p(B_1 \cap B_2)$ et $p(B_1) \times p(B_2)$.

Exercice 2.25 (Démonstration d'une propriété)

Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Indications

- Dresser un arbre de probabilité.
- On sait que : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

2.7 Exercices de type bac

Exercice 2.26

À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

- 65 % de la population concernée est contre la construction, et parmi ces opposants, 70 % sont des écologistes ;
- parmi les personnes qui ne sont pas opposées à la construction, 20 % sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

On définit les événements suivants :

- C : « la personne interrogée est contre la construction d'un barrage » ;
- E : « la personne interrogée est écologiste ».

Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. D'après l'énoncé, sans aucun calcul, donner les valeurs des probabilités suivantes : $p_C(E)$, $p_{\overline{C}}(E)$, $p(C)$.
2. Dresser un arbre pondéré représentant la situation.
3. Décrire les événements $\overline{C}$ et $\overline{C} \cap E$.
4. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit contre la construction et écologiste.
5. Démontrer que $p(E) = 0,525$.
6. La personne interrogée est écologiste. Calculer la probabilité que cette personne soit contre la construction.
7. Les événements C et E sont-ils indépendants ? Justifier.
8. On interroge 20 personnes au hasard dans la population concernée.
   a) Quelle est la probabilité que 5 personnes exactement soient écologistes ?
   b) Quelle est la probabilité que au plus 5 personnes soient écologistes ?

Exercice 2.27 (inspiré de l'ex. 4 du bac S de Pondichéry en avril 2013)

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent .
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.

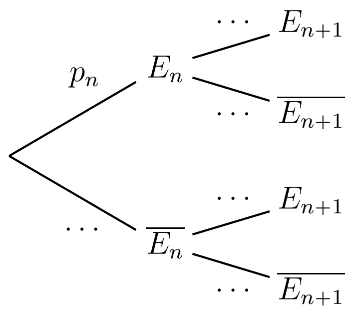
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a)** Tracer un arbre pondéré qui représente la situation pour les événements E_1, $\overline{E_1}$, E_2, $\overline{E_2}$, E_3, $\overline{E_3}$.

   b) Calculer la valeur de p_3.

   c) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a)** Compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous.



   b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

   c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

   d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis de p_n en fonction de n.

   e) En déduire la limite de la suite (p_n).

   f) Interpréter concrètement la limite précédente.

2.8 Pour réviser

Chapitre du livre n° 13 – Conditionnement et indépendance

Les exercices résolus

- ex 1 p 355 : calculer une probabilité conditionnelle
- ex 2 p 355 : traduire un énoncé en probabilités
- ex 5 p 357 : partition de l'univers / probabilités totales
- ex 10 p 359 : étudier l'indépendance de deux événements
- ex 11 p 359 : utiliser l'indépendance de deux événements

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés pages 468-469

- ex 3 p 355 : probabilités conditionnelles
- ex 4 p 355 : probabilités conditionnelles et probabilités d'intersection d'événements
- ex 6 p 357 : partition de l'univers / probabilités totales
- ex 12 et 13 p 359 : indépendance

Rubrique *Objectif bac*, corrigés pages 478

- ex 43 p 365 (QCM)
- ex 44 p 365 (vrai/faux)
- ex 45 p 365 (vrai/faux)
- ex 46 p 366 : problème de type bac, sur probabilité et suite

II Cours

2.1 Probabilité sur un ensemble fini (3^e, 2^{de})

Définition 2.1

Soit Ω l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.
Un événement est un ensemble d'issues de cette expérience aléatoire.
Une probabilité p attribue à chaque événement un nombre entre 0 et 1, c'est dire que pour tout événement A, on a : $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
Cette probabilité p vérifie les égalités suivantes : $p(\Omega) = 1$ $\quad p(\varnothing) = 0$

Propriété 2.1 (Événement contraire)

Si $\overline{\mathrm{A}}$ est l'événement contraire de A, on a : $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})$

Définition 2.2 (Intersection et réunion d'événements)

- On dit que l'événement **A et B** se produit lorsque les deux événements se produisent simultanément. Cet événement s'écrit aussi $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et s'appelle aussi **intersection** des événements A et B.
- On dit que l'événement **A ou B** se produit lorsque l'événement A se produit ou l'événement B se produit ou les deux à la fois (l'un ou l'autre ou les deux). Cet événement s'écrit aussi $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et s'appelle aussi **réunion** des événements A et B.
- La notation $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ se lit « A inter B » et la notation $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ se lit « A union B »

Propriété 2.2

Pour tous événements A et B, on a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Définition 2.3 (Événements incompatibles)

Quand $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, on dit que les événements A et B sont **incompatibles**.

Remarque : deux événements incompatibles sont deux événements qui ne peuvent pas se produire simultanément.

Propriété 2.3

Pour deux événements incompatibles A et B, on a : $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.

Propriété 2.4

Quand les issues d'une expérience aléatoire sont équiprobables, la probabilité d'un événement est égale à : $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

2.2 Répétition d'expériences identiques et indépendantes (1^{re} S)

En première, la répétition d'expériences identiques et indépendantes a été étudiée, en utilisant des arbres pondérés et la propriété ci-dessous, mais sans donner de définition mathématique de deux événements indépendants.

*La définition mathématique d'**événements indépendants** sera étudiée au paragraphe 2.7.*

Propriété 2.5

Dans le cas d'une répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

Exemple

On tire au hasard un nombre entier entre 0 et 9, puis une lettre au hasard, puis un signe au hasard parmi $\bigcirc$, $\diamondsuit$, $\triangle$.

Quelle est la probabilité d'obtenir le code `5F`$\triangle$?

Ces trois tirages au hasard sont indépendants donc :

$$p(\text{« Obtenir 5F} \triangle \text{ »}) = p(\text{« Obtenir 5 »}) \times p(\text{« Obtenir F »}) \times p(\text{« Obtenir } \triangle \text{ »})$$
$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{26} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{780}}$$

2.3 Variable aléatoire discrète (1re S)

2.3.a Définitions et propriétés

Définition 2.4 (Variable aléatoire discrète)

Une variable aléatoire discrète est une fonction qui associe à chaque issue d'une expérience aléatoire un nombre réel.

Définition 2.5 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire)

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète associe une probabilité à chaque valeur de la variable aléatoire. Cette loi est présentée par le tableau ci-contre.

X	x_1	x_2	...	x_n	Total
p	p_1	p_2	...	p_n	1

Définition 2.6 (Espérance, variance, écart-type)

X est une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-contre.

X	x_1	x_2	...	x_n	Total
p	p_1	p_2	...	p_n	1

Alors

- l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, notée E(X), est définie par : $\mathrm{E(X)} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$
- la variance de la variable aléatoire X, notée V(X), est définie par : $\mathrm{V(X)} = p_1\left(x_1 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + p_2\left(x_2 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - \mathrm{E(X)}\right)^2$
- l'écart-type de la variable aléatoire X, noté σ(X), est défini par : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$

Propriété 2.6 (Espérance et moyenne)

On répéte une expérience aléatoire, on note à chaque étape la valeur de la variable aléatoire, et on calcule la moyenne.
La moyenne de cette variable aléatoire se rapproche de son espérance lorsque le nombre de répétitions devient grand.

Propriété 2.7

Pour une variable aléatoire X et deux nombres a et b, on a les égalités suivantes :
$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad V(aX) = a^2V(X) \qquad \sigma(aX) = |a| \times \sigma(X).$

2.3.b Utilisation de la calculatrice (statistique)

Les commandes de la calculatrice pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type sont en fait des commandes de ***statistique****. Elles sont rappelées ci-dessous.*

Consignes et remarques pour tous les modèles : saisir les valeurs de la série statistique dans la première colonne et les effectifs ou les fréquences dans la deuxième colonne.

TI 82

Saisie des données : touche stats, puis choisir `1:Edite`

Calculs : appuyer à nouveau sur stats, choisir `CALC`, puis `1:Stats 1-Var`, puis compléter ainsi : `Stats 1-Var(`L_1`,`L_2`)` et valider.

Liste des résultats (appuyer sur les flèches pour descendre et monter dans la liste)

$\overline{x}$ moyenne ; `n` effectif total ;

`minX` minimum ; `Q1` premier quartile ; `Méd` médiane ; `Q3` troisième quartile ; `maxX` maximum

TI89

Saisie des données

Appuyer sur la touche APPS, puis aller sur l'icône `Stats/List`, puis valider (touche ENTER).

Si une fenêtre nommée `Folder selection ...` apparaît, valider.

On voit :

list1	list2	list3	list4

Saisir les nombres de la série dans `list1` et les effectifs ou les fréquences dans `list2`.

Calculs

Appuyer sur la touche F4, on voit une liste déroulante.
Choisir `1:1-Var Stats...`, puis valider.

Une fenêtre s'ouvre, et on voit : `List:` `list1` `Freq:` `list2`

Modifier si nécessaire.
Appuyer une fois sur ENTER.
Les résultats apparaissent dans une fenêtre (voir à droite).
Pour descendre dans la liste des résultats, appuyer plusieurs fois sur la touche ↓.

	$\overline{x}$	=	moyenne
	Σx	=	somme
	Σx^2	=	
	Sx	=	
	σx	=	écart-type
	`n`	=	effectif total
	`MinX`	=	minimum
↓	`Q1X`	=	1^er^ quartile
	`MedX`	=	médiane
	`Q3X`	=	3^e^ quartile
	`MaxX`	=	maximum
	$\Sigma(x-\overline{x})^2$	=	

CASIO

Saisie des données

Touche MENU, icône STAT, valider, puis compléter les colonnes List 1 et List 2.

Calculs

Touche MENU, icône STAT, valider, puis appuyer sur F2 (CALC), puis sur F6 (SET), et compléter ainsi :

`1 Var X List : List1` (appuyer sur F1) `1 Var Freq : List2` (appuyer sur F2)

Appuyer sur EXIT F1 (1 VAR)

Liste des résultats (appuyer sur les flèches pour descendre et monter dans la liste)

$\overline{x}$ moyenne ; `n` effectif total ;

`minX` minimum ; `Q1` premier quartile ; `Méd` médiane ; `Q3` troisième quartile ; `maxX` maximum

2.4 Loi binomiale (1re S)

2.4.a Épreuve de Bernoulli

Définition 2.7

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues, l'une appelée succès S, l'autre échec $\overline{S}$.

Exemples d'épreuves de Bernoulli

- On joue à pile ou face et on convient que pile est le succès et face l'échec.
- Des pièces fabriquées par une usine ont une probabilité d'être en état de marche de 97 %. Le succès est l'état de marche avec une probabilité de 0,97 et l'échec est la présence de défaut avec une probabilité de 0,03.

Exemples d'expériences aléatoires qui ne sont pas des épreuves de Bernoulli

Quand une expérience aléatoire a plus de deux issues, ce n'est pas une épreuve de Bernoulli, par exemple :

- on lance un dé et on note le numéro obtenu (6 issues) ;
- avant une élection, on interroge une personne au hasard et on lui demande si elle souhaite voter pour le candidat A, B, ou C (3 issues).

2.4.b Schéma de Bernoulli et loi binomiale

Définition 2.8 (Schéma de Bernoulli)

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 2.9 (Loi binomiale)

On peut dire qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p lorsque les conditions suivantes sont respectées.

- Une expérience aléatoire n'a que deux issues, avec une probabilité de succès égale à p ;
- cette expérience est répétée n fois de manière identique et indépendante ;
- X est la variable aléatoire égale au nombre de succès.

Définition 2.10 (Coefficient binomial)

On représente un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli à l'aide d'un arbre. Pour tout entier k compris entre 0 et n, le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions se note $\binom{n}{k}$ et est appelé coefficient binomial.

Définition 2.11 (Formule générale de la loi binomiale)

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p,
alors pour tout entier k entre 0 et n, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Propriété 2.8 (Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale)

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p,
alors : $E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

2.4.c Coefficient binomial à la calculatrice

Exemple : $\binom{6}{2} = 15$

Avec une TI 82 : $\boxed{6}$ $\boxed{\text{math}}$ $\boxed{\leftarrow}$ $\boxed{3}$ (Combinaison) $\boxed{2}$ $\boxed{\text{entrer}}$ Affichage : `6 Combinaison 2`

Avec une TI 89 : $\boxed{\text{HOME}}$ $\boxed{\text{2ND}}$ [MATH]

Dans les menus, choisir `7:Probability`, puis `3:nCr` Compléter ainsi : `nCr(6,2)`

Avec une CASIO : $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{F6}}$ $\boxed{\text{F3}}$ (PROB) $\boxed{6}$ $\boxed{\text{F3}}$ (nCr) $\boxed{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$

Avec une NUMWORKS

- aller dans l'application `Calculs`
- appuyer sur la touche Toolbox $\boxed{\text{paste''}}$
- descendre sur `Dénombrement`
- appuyer sur $\boxed{\rightarrow}$
- choisir `binomial(n,k)`
- appuyer sur $\boxed{\text{EXE}}$
- compléter ainsi : $\binom{6}{2}$
- appuyer sur $\boxed{\text{EXE}}$

2.4.d Loi binomiale à la calculatrice

Avec une calculatrice TI 82 Advanced ou TI 83 Premium

1. $\boxed{p(X = k)}$

   Calculer une probabilité, par exemple calculer P(X = 2) pour une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$.
   - Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [distrib]
   - Descendre jusqu'à `binomFdp(` et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$.
   - Compléter l'écran ainsi :
     ```
     nbreEssais:6
     p:0.3
     valeur de x:2
     ```
   - Appuyer deux fois sur $\boxed{\text{entrer}}$
   - On voit alors : `binomFdp(6,0.3,2)` Appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$

2. $\boxed{p(X \leqslant k)}$

   Calculer par exemple $P(X \leqslant 2)$ pour une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$.

   Procéder comme pour P(X = 2) ci-dessus en choisissant `binomFRép(` au lieu de `binomFdp(`.

Avec un modèle plus ancien de calculatrice TI 82

- $\boxed{p(X = k)}$

  Pour calculer $P(X = 2)$ pour une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$.

  $\boxed{\text{2nde}}$ [distrib], descendre sur `binomFdp`, compléter ainsi : `binomFdp(6,0.3,2)`, puis $\boxed{\text{entrer}}$.

  À retenir : $\boxed{P(X = k) = \texttt{binomFdp}(n,p,k)}$

- $\boxed{p(X \leqslant k)}$

  Pour calculer $P(X \leqslant 2)$ pour une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$, procéder comme pour P(X = 2) ci-dessus en choisissant `binomFRép(` au lieu de `binomFdp(`.

  À retenir : $\boxed{P(X \leqslant k) = \texttt{binomFRép}(n,p,k)}$

Avec une calculatrice CASIO

Ces calculatrices donnent directement la loi de probabilité dans un tableau.

MENU choisir STAT, puis appuyer sur F5 (DIST) F5 (BINM) F1 (BPd)

Compléter alors l'écran ainsi : devant `Numtrial` : saisir n, et devant `P` : saisir p.

Avec une calculatrice NUMWORKS

- aller dans l'application `Probabilités`
- appuyer sur EXE
- saisir les valeurs de n et p
- sur `Suivant`, appuyer sur EXE
- avec la touche $\boxed{\leftarrow}$, aller sur le petit logo à gauche
- appuyer sur $\boxed{\downarrow}$
- on peut alors choisir dans l'ordre un calcul du type :
  $P(X \leqslant k)$ ou $P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2)$ ou $P(X \geqslant k)$ ou $P(X = k)$.

2.4.e Loi binomiale avec des logiciels

Dans le tableur de LibreOffice : =LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;0) (remplacer k par une référence de cellule, remplacer n et p par leurs valeurs).

Dans GeoGebra : dans la ligne de saisie Binomiale[n,p] (remplacer n et p par leurs valeurs).

2.5 Probabilité conditionnelle

2.5.a Définition et propriété

Définition 2.12

Si $p(A) \neq 0$, on appelle la *probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A* le nombre, noté $p_A(\mathrm{B})$ défini par : $p_A(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$

Conséquence de cette définition :

Propriété 2.9 (Probabilité de l'intersection de deux événements)

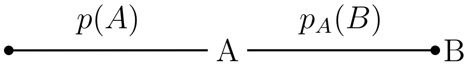
$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p_A(\mathrm{B})$

2.5.b Arbre pondéré

Règles et vocabulaire sur les arbres pondérés

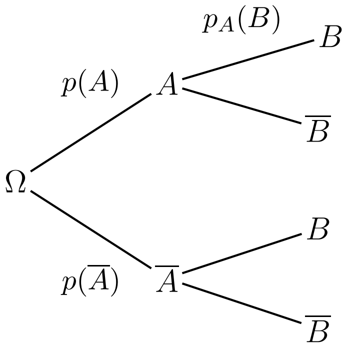
- L'origine de l'arbre est Ω (ensemble des issues possible de l'expérience aléatoire).
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité inscrite sur une branche entre deux événement A et B est la probabilité conditionnelle de B sachant A.
  $\mathrm{A} \xrightarrow{p_A(B)} \mathrm{B}$
- Une succession de plusieurs branches avec leurs événements est un **chemin**. Au bout d'un chemin se trouve une feuille, qui correspond à l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.

- La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égal au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.



événement	probabilité
A ∩ B	$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

Schéma



$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

Exemple : exercice sur fiche n° 2.9

2.5.c Tableau de probabilités

Ci-dessous, le tableau de probabilités correspondant à l'arbre pondéré précédent

	B	$\overline{B}$	Total
A	$p(A \cap B)$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(A)$
$\overline{A}$	$p(\overline{A} \cap B)$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$p(\overline{A})$
Total	$p(B)$	$p(\overline{B})$	1

Règles de calcul dans un tableau de probabilités

- Dans une case du tableau qui se trouve à l'intersection d'une rangée et d'une colonne on écrit la probabilité de l'intersection des événements correspondants.
- La somme des probabilités d'une rangée est dans la colonne de droite.
- La somme des probabilités d'une colonne est dans la rangée du bas.
- Dans la colonne de droite, et dans la rangée du bas, la somme des probabilités est 1

2.6 Exercice corrigé – Partition de l'univers

2.6.a Corrigé

Corrigé de l'exercice sur fiche n° 2.13

Énoncé

Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.

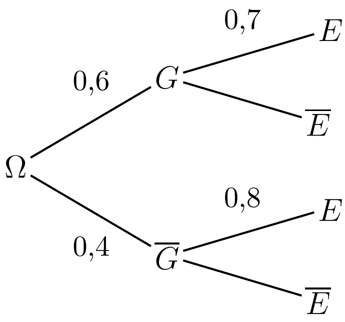
On choisit au hasard un candidat qui s'est présenté aux épreuves.

Correction

On nomme

- G l'événement « le candidat choisi est un garçon » ;
- E l'événement « le candidat choisi est engagé ».

Arbre pondéré représentant la situation



$p(G \cap E) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$

$p(\overline{G} \cap E) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$

Tableau de probabilités

	E	$\overline{E}$	Total
G	0,42		0,6
$\overline{G}$	0,32		0,4
Total	0,74		1

1. **Probabilité que le candidat choisi soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire :** $p(G \cap E) = p(G) \times p_G(E) = 0,6 \times 0,7 = \boxed{0,42}$
2. **Probabilité que le candidat choisi soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire :** $p(\overline{G} \cap E) = p(\overline{G}) \times p_{\overline{G}}(E) = 0,4 \times 0,8 = \boxed{0,32}$
3. **Probabilité que le candidat choisi soit engagé.**
   Comme l'indique le tableau de probabilités, on a :
   $p(E) = p(G \cap E) + p(\overline{G} \cap E) = 0,42 + 0,32 = \boxed{0,74}$
4. **Sachant que le candidat choisi a été engagé, probabilité que ce soit un garçon.**
   $p_E(G) = \dfrac{p(G \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,42}{0,74} \approx \boxed{0,568}$

2.6.b Partition de l'univers – Probabilités totales

Revenons sur le calcul effectué à la question 3. dans le corrigé ci-dessus :
$p(E) = p(G \cap E) + p(\overline{G} \cap E) = 0,42 + 0,32 = \boxed{0,74}$

On dit que les événements G et $\overline{G}$ forment une *partition* de l'univers Ω et qu'on a calculé la probabilité de l'événement E en utilisant cette partition.

L'égalité $p(E) = p(G \cap E) + p(\overline{G} \cap E)$ s'appelle la *formule des probabilités totales*.

Le programme de terminale S indique qu'un élève doit savoir calculer la probabilité d'un événement comme l'événement E, mais qu'on ne lui demande pas de connaître le vocabulaire *partition* et *formule des probabilités totales*.

2.7 Indépendance

Définition 2.13

Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$

Conséquence de la définition :

Propriété 2.10

Si deux événements A et B sont indépendants et si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$
alors $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$ et $p(\mathrm{A}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$

Remarque

Ainsi la probabilité d'obtenir l'événement B sachant que A est réalisé est égale à la probabilité d'obtenir l'événement B. Intuitivement, cela signifie bien que **B ne dépend pas de A**.

De même A ne dépend pas de B, et cela correspond bien à l'idée que A et B sont indépendants.

Propriété 2.11 (Tirages successifs dans une urne)

Dans une urne contenant des boules de couleurs différentes, on effectue au hasard plusieurs tirages successifs.

- Si on effectue ces tirages **avec remise**, les tirages successifs sont **indépendants** ;
- si on effectue ces tirages **sans remise**, les tirages successifs **ne sont pas indépendants** ;
- si on effectue ces tirages **sans remise**, mais que dans l'urne **le nombre de boules est très élevé**, on peut approximativement considérer que les tirages successifs sont **indépendants**.

Le programme indique qu'un élève doit savoir démontrer la propriété ci-dessous.

Propriété 2.12

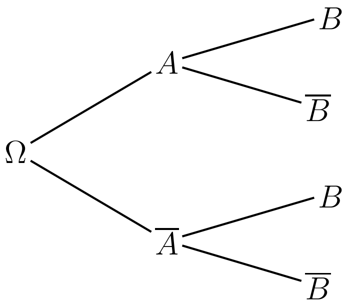
Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration (à connaître)

Nous savons que deux événements A et B sont indépendants, ce qui signifie que :

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Nous voulons démontrer qu'alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, c'est à dire : $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p(B)$.



On sait que : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

Donc :

$$\begin{aligned} p(B \cap \overline{A}) &= p(B) - p(B \cap A) && \text{or } p(B \cap A) = p(B) \times p(A). \\ &= p(B) - p(B) \times p(A) && \text{(on peut mettre } p(B) \text{ en facteur)} \\ &= p(B) \times (1 - p(A)) && \text{or } 1 - p(A) = p(\overline{A}) \\ &= p(B) \times p(\overline{A}) \end{aligned}$$