Chapitre 3

Dérivée

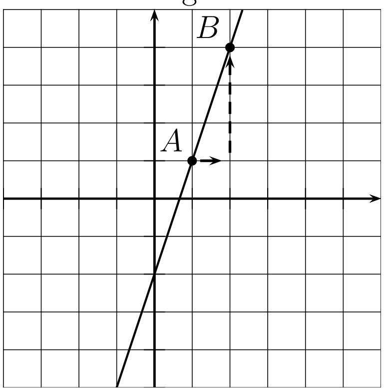
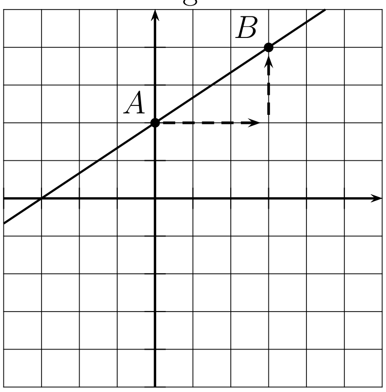
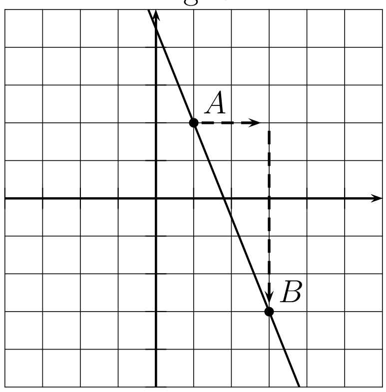
I Exercices

3.1 Coefficient directeur d'une droite

Avant de faire les exercices suivants, lire le cours, paragraphe 3.1.a, page 41.

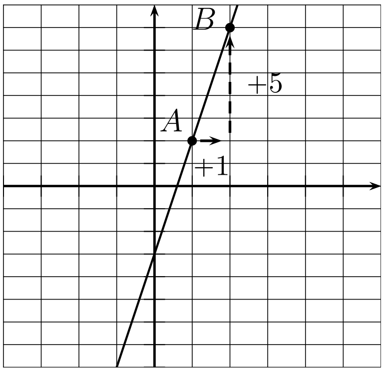
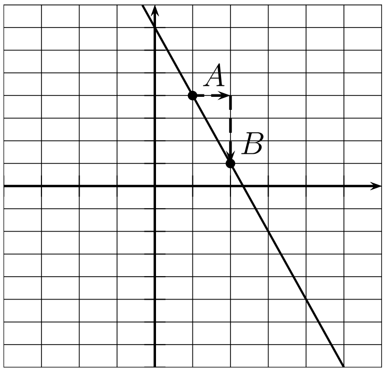
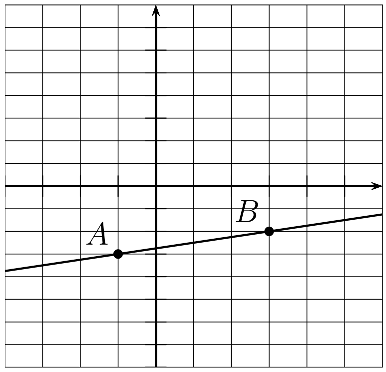
Exercice 3.1

Pour chaque figure ci-dessous, déterminer le coefficient directeur m de la droite (AB), graphiquement et par le calcul. L'unité du repère est chaque fois un carreau.

Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3
		
Graphiquement :	Graphiquement :	Graphiquement :
$m =$	$m =$	$m =$ ....
Par le calcul :	Par le calcul :	Par le calcul :
$x_A =$ .... $y_A =$	$x_A =$ .... $y_A =$	$x_A =$ .... $y_A =$ ....
$x_B =$ .... $y_B =$	$x_B =$ .... $y_B =$	$x_B =$ .... $y_B =$ ....
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$	$m =$	$m =$ ....
....	....	....

Exercice 3.2

Pour chaque figure ci-dessous, déterminer le coefficient directeur de la droite (AB), graphiquement et par le calcul. L'unité du repère est chaque fois un carreau.

Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3
		
Graphiquement :	Graphiquement :	Graphiquement :
$m =$	$m =$	$m =$ ....
Par le calcul :	Par le calcul :	Par le calcul :
$x_A =$ .... $y_A =$	$x_A =$ .... $y_A =$	$x_A =$ .... $y_A =$ ....
$x_B =$ .... $y_B =$	$x_B =$ .... $y_B =$	$x_B =$ .... $y_B =$ ....
$m =$.........................	$m =$.........................	$m =$.........................
....	....	....

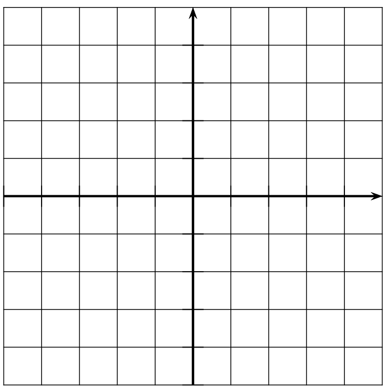
Exercice 3.3

Dans chaque repère ci-dessous,

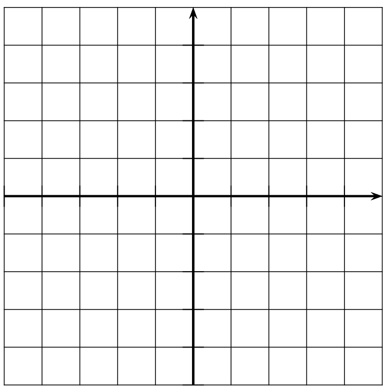
1. placer le point A ;
2. tracer la droite qui passe par le point A de coefficient directeur m.

Les unités sont chaque fois celles du quadrillage.

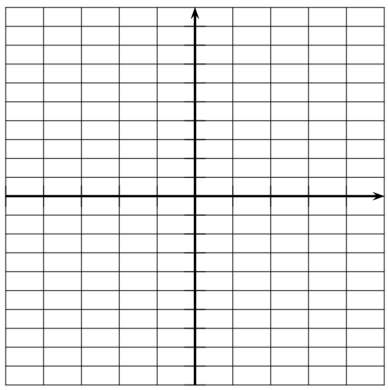
1. $A\ (-1\ ;\ 3)$; $m = -2$



2. $A\ (0\ ;\ -1)$; $m = \dfrac{3}{4}$



3. $A\ (-4\ ;\ -2)$; $m = \dfrac{3}{2}$

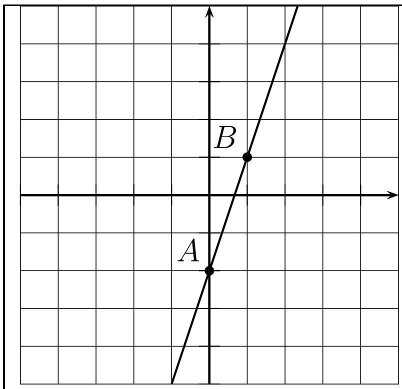
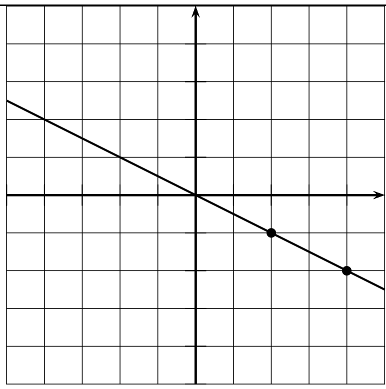
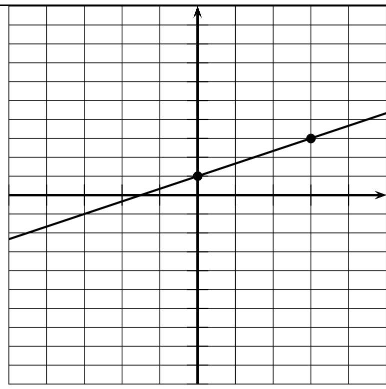


3.2 Équation réduite d'une droite

Avant de faire les exercices suivants, lire le cours, paragraphe 3.1, page 41.

Exercice 3.4

Dans chaque repère, déterminer l'équation réduite de la droite, graphiquement, et par le calcul. Les unités sont chaque fois celles du quadrillage.

		
Graphiquement : $m =$ .... $p =$ .... équation : .... Par le calcul : $x_A =$ .... $y_A =$ .... $x_B =$ .... $y_B =$ .... $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} =$ .... $p = y_A - m\,x_A =$ .... équation :	Graphiquement : $m =$ .... $p =$ .... équation : .... Par le calcul : $x_A =$ .... $y_A =$ .... $x_B =$ .... $y_B =$ .... $m =$ .... $p =$ .... équation :	Graphiquement : $m =$ .... $p =$ .... équation : .... Par le calcul : $x_A =$ .... $y_A =$ .... $x_B =$ .... $y_B =$ .... $m =$ .... $p =$ .... équation : ....

3.3 Fonctions : images, dérivées, tangentes (1)

Exercice 3.5 (Lire et calculer des images)

La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée dans le repère ci-dessous.

1. Répondre à ces questions par lecture graphique

a) Quelles sont les images de 2, de 5, de 8, et de 10 :

$f(2) =$ .... $f(5) =$ ....

$f(8) =$ .... $f(10) =$ ....

b) Quel est le minimum de f et en quelle valeur de x est-il atteint ? minimum = ... $x =$ ....

2. La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 12x + 30$
Calculer les images de 2, de 5, de 6, de 8, et de 10 en détaillant :

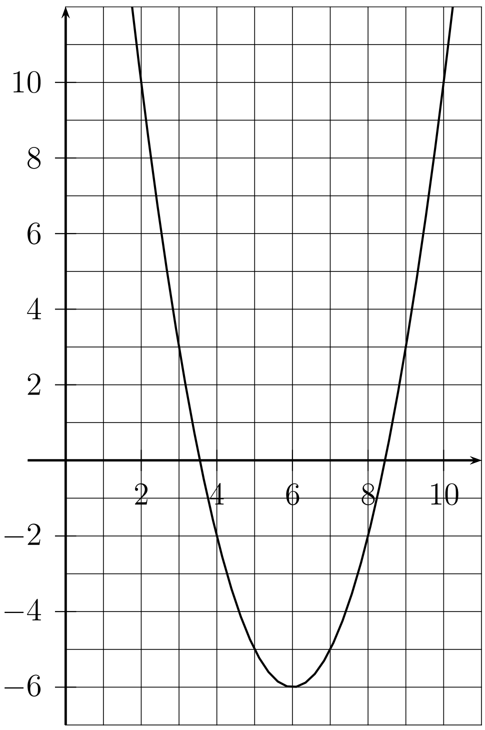
$f(2) =$ ....

$f(5) =$ ....

$f(6) =$ ....

$f(8) =$ ....

$f(10) =$ ....



Exercice 3.6 (Lire des dérivées)

Pour faire cet exercice, voir le cours, paragraphe 3.2, page 42.

La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée dans le repère ci-dessous.

1. Le point A est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x_A = 9$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.

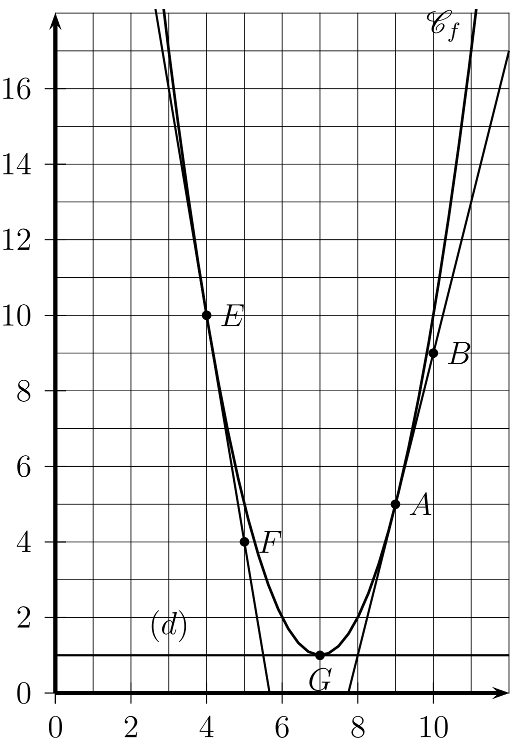
Compléter par lecture graphique : $f'(9) =$ ....

2. Le point E est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x_E = 4$.
La droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en E.

Compléter par lecture graphique : $f'(4) =$ ....

3. Le point G est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x_G = 7$.
La droite (d) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en G.

Compléter par lecture graphique : $f'(7) =$ ....



3.4 Calculs de dérivées

Pour calculer les dérivées ci-dessous, voir le cours, paragraphe 3.3, page 42.

Exercice 3.7

Calculer chaque fois la fonction dérivée.

1. $f(x) = x^3$ $f'(x) =$ .... **2.** $f(x) = x$; $f'(x) =$ ....

3. $f(x) = x^2$; $f'(x) =$ .... **4.** $f(x) = 6$; $f'(x) =$ ....

5. $f(x) = x^7$; $f'(x) =$ .... **6.** $f(x) = x^4$; $f'(x) =$ ....

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f'(x) =$ .... **8.** $f(x) = -2$; $f'(x) =$ ....

Exercice 3.8

Calculer chaque fois la fonction dérivée.

1. $f(x) = x^6 + x^8$; $f'(x) =$ .... **2.** $f(x) = x^9 + x^7$; $f'(x) =$ ....

3. $f(x) = x^3 + x$; $f'(x) =$ .... **4.** $f(x) = x^5 + 8$; $f'(x) =$ ....

5. $f(x) = 4 + x^2$; $f'(x) =$ .... **6.** $f(x) = x^7 - 3$; $f'(x) =$ ....

7. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 5$; $f'(x) =$ ....

8. $f(x) = x^3 + x^2 + x$; $f'(x) =$ ....

Exercice 3.9

Calculer chaque fois la fonction dérivée.

1. $f(x) = 5x^6$; $f'(x) =$ .... **2.** $f(x) = -8x^2$; $f'(x) =$ ....

3. $f(x) = -6x^3$; $f'(x) =$ .... **4.** $f(x) = 4x$; $f'(x) =$ ....

5. $f(x) = \dfrac{4}{x} = 4 \times \dfrac{1}{x}$; $f'(x) =$ ....

6. $f(x) = -\dfrac{7}{x} = -7 \times \dfrac{1}{x}$; $f'(x) =$ ....

Exercice 3.10

Calculer chaque fois la fonction dérivée.

1. $f(x) = 5x^4 + 6x^3$; $f'(x) =$ ....

2. $f(x) = -2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 9$; $f'(x) =$ ....

3. $f(x) = x^2 + 5x - 8$; $f'(x) =$ ....

4. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 7$; $f'(x) =$ ....

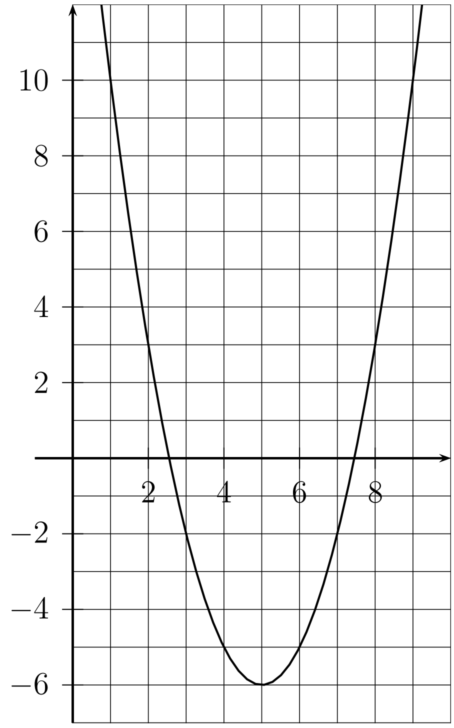
5. $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 7x + 9$; $f'(x) =$ ....

6. $f(x) = 3x^2 - 7x + 9$; $f'(x) =$ ....

3.5 Fonctions : images, dérivées, tangentes (2)

Exercice 3.11

La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée dans le repère ci-dessous.



1. Répondre à ces questions par lecture graphique

   a) Quelles sont les images de 4, et de 8 :

   $f(4) =$ .... $f(8) =$ ....

   b) Quel est le minimum de f et en quelle valeur de x est-il atteint ? minimum = ... $x =$ ....

2. La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 10x + 19$
Calculer les images de 4, de 5 et de 8 en détaillant :

$f(4) =$ ....

$f(5) =$ ....

$f(8) =$ ....

3. Calculer la dérivée de la fonction f :

$f'(x) =$ ....

4. Sur la courbe $\mathscr{C}_f$, placer le point A d'abscisse 4, le point B d'abscisse 5, le point C d'abscisse 8.

5. Calculer $f'(4)$, $f'(5)$, $f'(8)$:

$f'(4) =$ ....

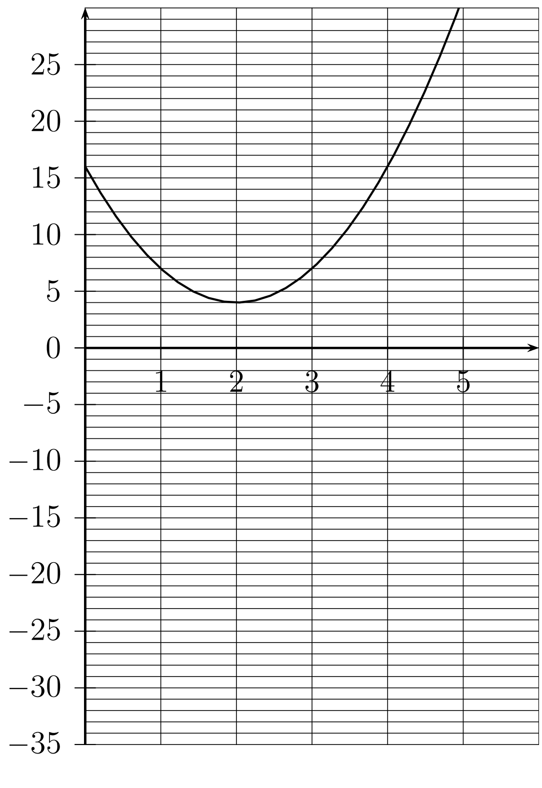
$f'(5) =$ ....

$f'(8) =$ ....

6. Tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A, en B, et en C.

Exercice 3.12

La fonction f est définie par $f(x) = 3x^2 - 12x + 16$
et elle est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée dans le repère ci-contre.



1. Calculer la dérivée de la fonction f

$f'(x) =$ ....

2. Sur la courbe $\mathscr{C}_f$, placer le point A d'abscisse 3.

3. Calculer $f(3)$ et $f'(3)$:

$f(3) =$ ....

$f'(3) =$ ....

4. Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.

5. Calculer l'équation réduite de cette tangente.

....

....

....

....

Exercice 3.13

La fonction f est définie par $f(x) = x^3 - 4,5x^2 - 30x + 70$ et elle est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.

1. Calculer la dérivée de la fonction f

   $f'(x) =$ ....

2. Sur la courbe $\mathscr{C}_f$, placer le point A d'abscisse 4.
3. Calculer $f(4)$ et $f'(4)$:

   $f(4) =$ ....

   $f'(4) =$ ....

4. Calculer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.

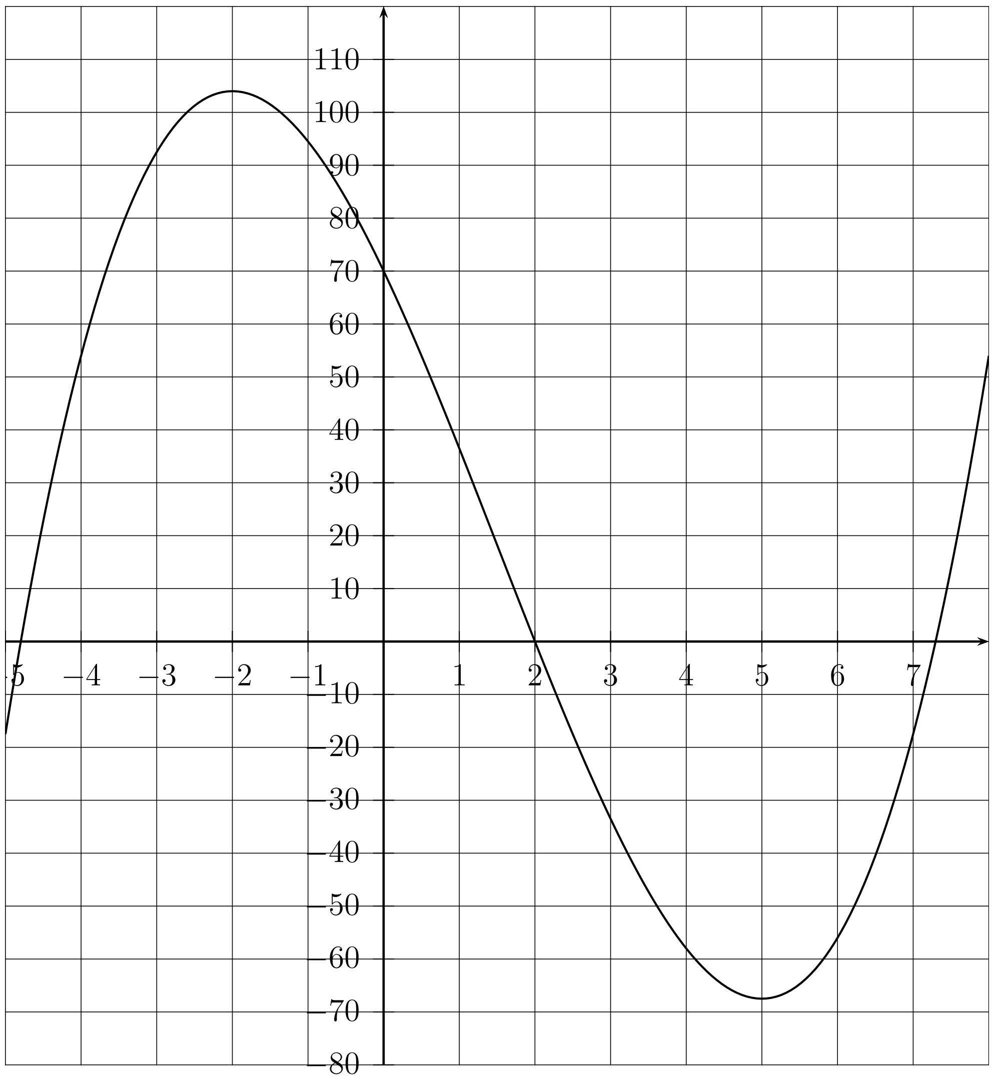
   ....

   ....

   ....

   ....

5. Tracer cette tangente.



3.6 Fonction : coût, recette, bénéfice

Exercice 3.14

Une entreprise fabrique x unités d'un produit. Le coût unitaire de production en euros est modélisé par la fonction : $u(x) = x^2 - 50x + 700$.

1. Calculer le coût unitaire lorsque l'entreprise fabrique 20 unités.

   ....

2. Calculer le coût total lorsque l'entreprise fabrique 20 unités.

   ....

3. Justifier que le coût total est modélisé par la fonction : $c(x) = x^3 - 50x^2 + 700x$.

   ....

   ....

4. Chaque unité est vendue 300 euros. Indiquer la fonction r qui donne la recette pour x unités vendues. $r(x) =$ ....

5. Les fonctions c et r sont représentées ci-dessous. D'après le graphique, combien d'unités faut-il vendre pour faire un bénéfice ? Donner la réponse sous forme d'intervalle.

   ....

6. Calculer la fonction b qui donne le bénéfice pour x unités vendues.

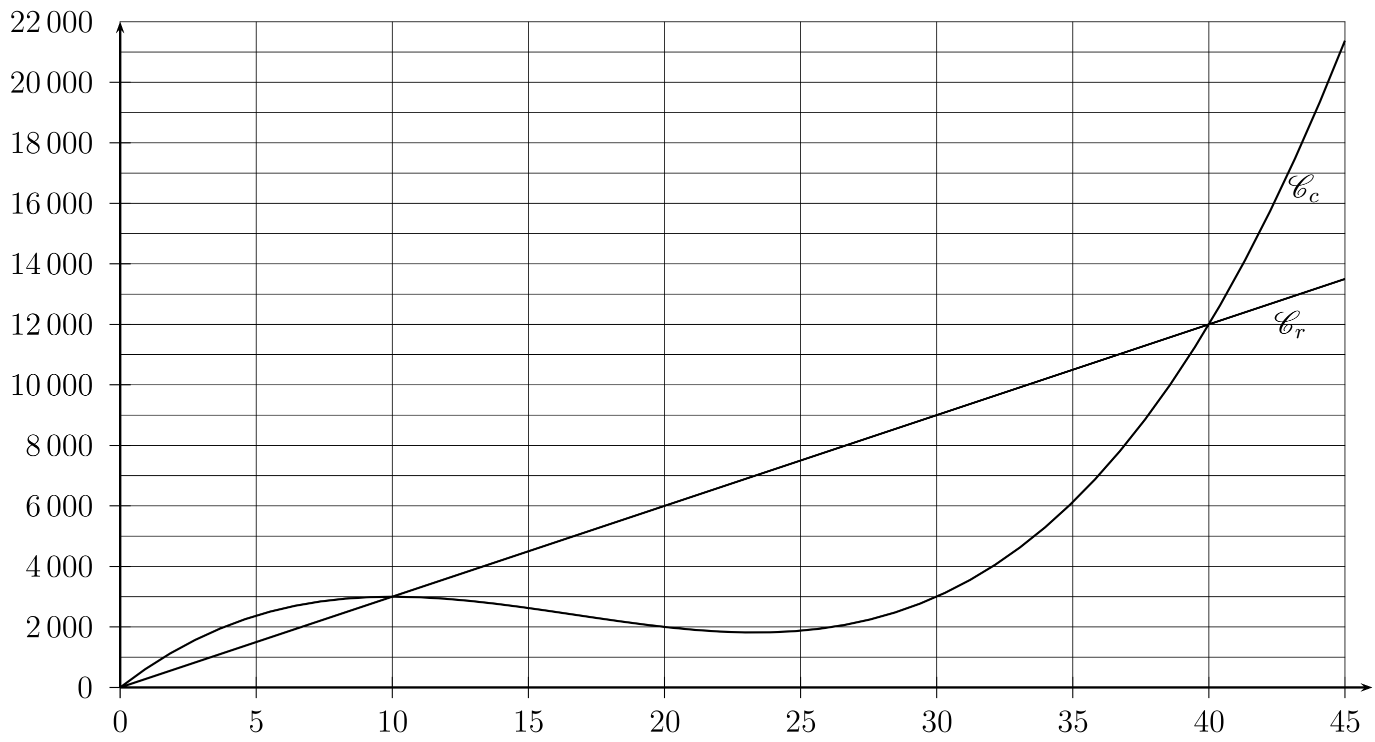
   $b(x) =$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....



II Cours

3.1 Équation réduite d'une droite

Définition 3.1

L'équation réduite d'une droite s'écrit $y = m\,x + p$.
m est son coefficient directeur, p est l'ordonnée à l'origine.

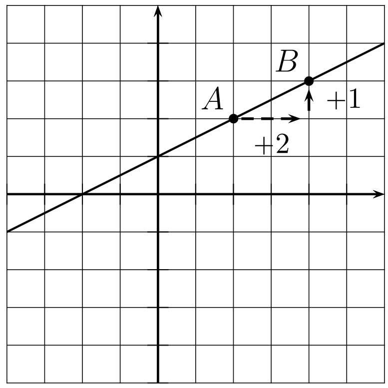
Propriété 3.1

L'équation réduite d'une droite (AB) est sous la forme $y = mx + p$,
et on a : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ $\quad p = y_A - m\,x_A$

3.1.a Comment déterminer le coefficient directeur d'une droite $(\boldsymbol{AB})$?

Exemple : $A\ (2,\ ;\ 2)$; $B\ (4\ ;\ 3)$ (l'unité du repère est un carreau)

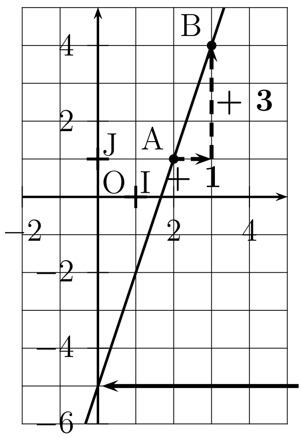
- **Graphiquement :** on compte les carreaux comme c'est indiqué sur le graphique ci-contre, puis on calcule : $\dfrac{1}{2} = 0,5$
  Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\boxed{0{,}5}$.
- **Par un calcul :** $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-2}{4-2} = \dfrac{1}{2} = 0,5$



3.1.b Comment déterminer l'équation réduite d'une droite $(\boldsymbol{AB})$?

Exemple : équation réduite de la droite (AB) pour les points A(2 ; 1) B(3 ; 4) (figure ci-dessous).

Graphiquement : on détermine le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine comme c'est indiqué sur la figure, donc l'équation réduite de la droite (AB) est $\boxed{y = 3x - 5}$.



coefficient directeur : $m = \dfrac{3}{1} = 3$

ordonnée à l'origine : $p = -5$

Par des calculs

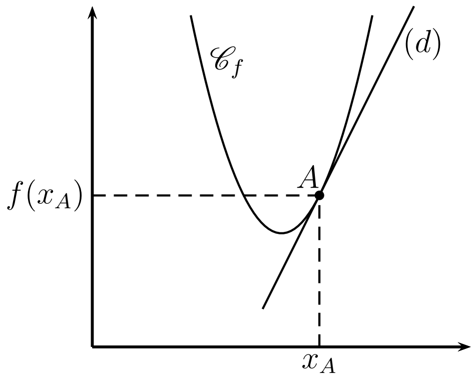
- L'équation réduite de la droite (AB), est sous la forme $y = mx + p$
- Calcul du coefficient directeur m : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-1}{3-2} = \dfrac{3}{1} = 3$
- Calcul de l'ordonnée à l'origine p : $p = y_A - mx_A = 1 - 3 \times 2 = 1 - 6 = -5$
- Donc l'équation réduite de la droite (AB) est : $y = 3x + (-5)$ soit $\boxed{y = 3x - 5}$.

3.2 Dérivée et tangente

Définition 3.2

$f'(x_A)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f au point A.

Sur la figure à droite, la droite (d) la tangente à la courbe de la fonction f au point A, et $f'(x_A)$ est le coefficient directeur de la droite (d).



3.3 Calculs de dérivées

Fonction	Dérivée
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2\,x$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3\,x^2$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Dérivée d'une somme de fonctions :	$(u+v)' = u' + v'$
Dérivée d'une fonction multipliée par une constante :	$(k\,u)' = k\,u'$
Dérivée d'un quotient de fonctions :	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Exemple 1 : $f(x) = x^3 + x^2$ $\quad f'(x) = \boxed{3x^2 + 2x}$

Exemple 2 : $f(x) = x^3 + 7$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 0 = \boxed{3x^2}$

Exemple 3 : $f(x) = x^5$ $\quad f'(x) = 5 \times x^{5-1} = \boxed{5\,x^4}$

Exemple 4 : $f(x) = 7x^4$ $\quad f'(x) = 7 \times 4x^3 = \boxed{28\,x^3}$

Exemple 5 : $f(x) = 8x^2 - 6x + 9$ $\quad f'(x) = 8 \times 2x - 6 \times 1 + 0 = \boxed{16x - 6}$

Exemple 6 : $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 3x - 6$ $\quad f'(x) = 4 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 3 \times 1 + 0 = \boxed{12x^2 - 14x + 3}$

Exemple 7 : dérivée d'un quotient de fonctions

Par exemple ont veut dériver la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x-4}{2x+1}$

Formule à appliquer : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

On pose alors : $u(x) = 5x - 4$ $v(x) = 2x + 1$

On calcule les dérivées : $u'(x) = 5$ $v'(x) = 2$

Donc : $f'(x) = \dfrac{5 \times (2x+1) - 2 \times (5x-4)}{(2x+1)^2} = \dfrac{\cancel{10x} + 5 - \cancel{10x} + 8}{(2x+1)^2} = \boxed{\dfrac{13}{(2x+1)^2}}$

3.4 Calculer l'équation réduite d'une tangente

Exemple

La fonction f est définie par : $f(x) = x^2 - 8x + 14$.

La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous.

1. Calculer la dérivée de f.

2. Placer le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$, d'abscisse $x_A = 6$.

3. Calculer l'équation réduite de la droite (d) tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.

4. Tracer cette tangente.

Correction

1. Dérivée de f : $\boxed{f'(x) = 2x - 8}$.

2. Point A de la courbe $\mathscr{C}_f$, d'abscisse $x_A = 6$: sur la figure.

3. Équation réduite de la droite (d) tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A.

- Coordonnées de A :
  $x_A = 6$ $\quad y_A = f(x_A) = f(6) = 6^2 - 8 \times 6 + 14 = 2$.
- L'équation réduite de cette tangente est sous la forme $y = mx + p$
  $m = f'(x_A) = f'(6) = 2 \times 6 - 8 = 4$
  $p = y_A - m\,x_A = 2 - 4 \times 6 = -22$
- Donc l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A est : $\boxed{y = 4x - 22}$

4. Tracé de cette tangente : sur la figure.