1 Résolution d'une équation

En collège, on apprend à résoudre les équations du premier degré à une inconnue, par exemple : $3x - 4 = 5x + 7$, puis en seconde et surtout en première, on apprend à résoudre les équations du second degré à une inconnue, par exemple : $3x^2 - 6x + 2 = 0$.

Pour les autres équations, en général, un lycéen ne connaît pas de méthode de résolution exacte et il faut alors une méthode approchée.

Par exemple, l'équation $x^5 + x = 150$ est une équation du cinquième degré, il n'existe pas de méthode de résolution exacte.

2 Utilisation du théorème de la valeur intermédiaire.

Reprenons l'exemple de l'équation $x^5 + x = 150$.

On a : $x^5 + x = 150 \iff x^5 + x - 150 = 0$.

Définissons alors la fonction f par : $f(x) = x^5 + x - 150$.

Justifions que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;\,3]$.

On a : $f(2) = 2^5 + 2 - 150 = -116 < 0$ et $f(3) = 3^5 + 3 - 150 = 96 > 0$,
donc 0 est compris entre $f(2)$ et $f(3)$.

La fonction f est aussi strictement croissante, en effet : $f'(x) = 5x^4 + 1$, or $x^4 \geqslant 0$, donc $5x^4 \geqslant 0$, par conséquent $5x^4 + 1 \geqslant 1 > 0$.

On sait aussi que la fonction f est continue parce que c'est une fonction polynôme.

Donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire,
$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans l'intervalle } [2\,;\,3]}$.

3 Méthodes de résolution approchée de l'équation $f(x) = 0$

Le programme de terminale S indique ceci : *des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation* $f(x) = k$.

3.1 Méthode par dichotomie

3.1.1 Exemple

$f(x) = x^5 + x - 150$

On sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;\,3]$.

Ce qui suit est la recherche d'une valeur approchée de α par la méthode de dichotomie.

Algorithme et détail des calculs

Ci-dessous l'algorithme de dichotomie, est dans le tableau 1, et l'exécution de l'algorithme pour $d = 0,01$ est détaillée dans le tableau 2.

Algorithme

$a \leftarrow 2$
$b \leftarrow 3$
Tant que $b - a > d$
    $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
    Si $m^5 + m - 150 < 0$
        alors $a \leftarrow m$
        sinon $b \leftarrow m$
    Fin du Si
Fin du Tant que

Tab. 1

	$b-a$	m	$f(m)$	a	b
0				2	3
1	1	2,5	$-49,84$	2,5	3
2	0,5	2,75	10,03	2,5	2,75
3	0,25	2,625	$-22,74$	2,625	2,75
4	0,125	2,687 5	$-7,11$	2,687 5	2,75
5	0,062 5	2,718 75	1,26	2,687 5	2,718 75
6	0,031 25	2,703 125	$-2,98$	2,703 125	2,718 75
7	0,015 625	2,710 937 5	$-0,87$	2,710 937 5	2,718 75
8	0,007 812 5				

Tab. 2

Encadrement obtenu

D'après les valeurs des variables a et b à la ligne 7, on obtient $2{,}710\,937\,5 < \alpha < 2{,}718\,75$,
ce qui donne un encadrement de α au centième près : $\boxed{2{,}71 < \alpha < 2{,}72}$.

Représentation graphique

La figure 1 (page suivante) donne la représentation graphique des valeurs du tableau 2 jusqu'à la 3e étape.

A_0 et B_0 correspondent aux valeurs initiales 2 et 3
les traits verticaux indiquent que $f(2) < 0$ et $f(3) > 0$.

Ensuite :

- $\dfrac{2+3}{2} = 2,5$ on obtient le point A_1 et le trait vertical indique que $f(2,5) < 0$
- $\dfrac{2,5+3}{2} = 2,75$ on obtient le point B_2 et $f(2,75) > 0$
- $\dfrac{2,5+2,75}{2} = 2,625$ on obtient le point A_3 et $f(2,625) < 0$

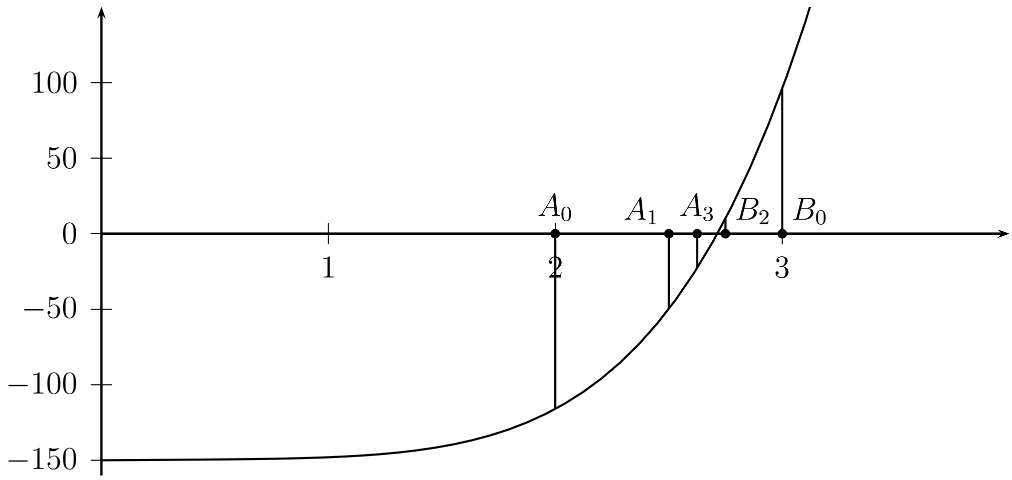


Fig. 1

3.1.2 Amélioration du test de l'algorithme de dichotomie

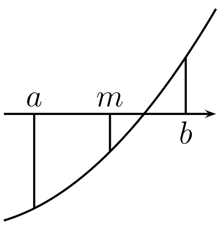
Pour résoudre de manière approchée une équation $f(x) = 0$, le principe de la méthode de dichotomie est de partir de deux nombres a et b

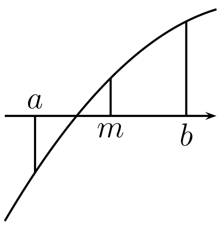
- tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, si f est croissante ;
- ou tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, si f est décroissante.

m prend alors la valeur $\dfrac{a+b}{2}$, et on calcule $f(m)$ qui peut être négatif ou positif.

Selon que f est croissante ou décroissante sur [a ; b], l'algorithme n'est pas le même :

- si f est croissante sur [a ; b], on a $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, et on peut avoir les deux cas de figure ci-dessous.

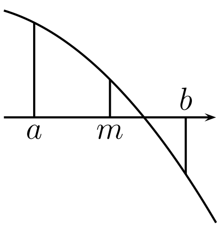


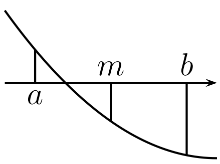


Dans l'algorithme on écrit :

si $f(m) < 0$
  alors $a \leftarrow m$
  sinon $b \leftarrow m$

- si f est décroissante sur [a ; b], on a $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, et on peut avoir les deux cas de figure ci-dessous.





Dans l'algorithme on écrit :

si $f(m) > 0$
  alors $a \leftarrow m$
  sinon $b \leftarrow m$

Pour éviter de devoir modifier l'algorithme selon que f est croissante ou décroissante sur [a ; b], il suffit d'écrire ceci :

si $f(a) \times f(m) > 0$
  alors $a \leftarrow m$
  sinon $b \leftarrow m$

3.1.3 Algorithme de résolution approchée d'une équation par dichotomie

La fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, et 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, et on sait qu'alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Dans l'algorithme ci-contre, les valeurs initiales des variables a et de b sont les nombres a et b de l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

Les valeurs finales de a et de b de donnent un encadrement de α.

Les variables a, b, d, m sont des nombres réels.

Algorithme

$a \leftarrow \cdots$
$b \leftarrow \cdots$
 	
Tant que $b - a > d$
    $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(a) \times f(m) > 0$
        alors $a \leftarrow m$
        sinon $b \leftarrow m$
    Fin du Si
Fin du Tant que

Tab. 3

3.2 Méthode des tangentes ou de Newton

Une fonction f est représentée graphiquement ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$.
La courbe coupe l'axe des abscisses en $I(\alpha\ ;\ 0)$, donc $f(\alpha) = 0$.

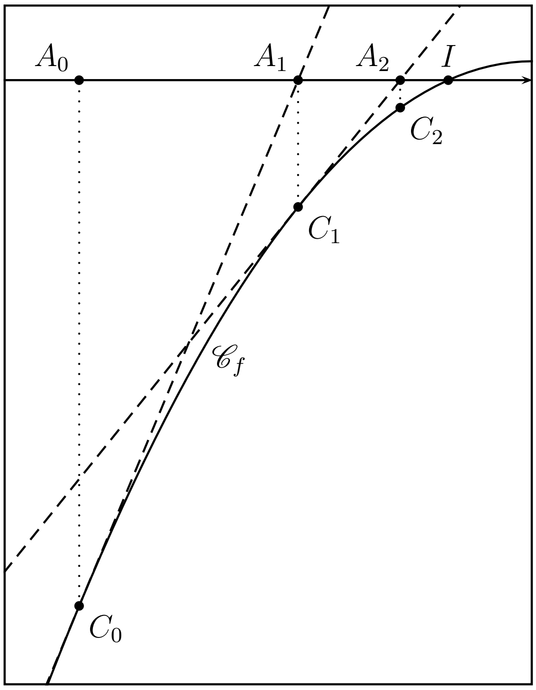
La méthode de Newton, qu'on appelle aussi méthode des tangentes est une construction géométrique.

On choisit un nombre u_0 « assez proche » de α, et on place le point $A_0(u_0\ ;\ 0)$.

- On place le point d'abscisse u_0 sur la courbe $\mathscr{C}_f$, qui est le point $C_0(u_0\ ;\ f(u_0))$.
- On trace alors la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en C_0.
- Cette tangente coupe l'axe des abscisses en $A_1(u_1\ ;\ 0)$.

Puis on reprend les trois points précédents à partir de u_1 : on obtient le point $C_1(u_1\ ;\ f(u_1))$, la tangente en C_1 qui coupe l'axe des abscisses en $A_2(u_2\ ;\ 0)$.

Et ainsi de suite …



Calculons maintenant u_1 en fonction de u_0.
L'équation de la la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en C_0 est : $y = f'(u_0) \times (x - u_0) + f(u_0)$
Le point $A_1(u_1\ ;\ 0)$ est sur cette tangente, par conséquent ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus.
Donc : $0 = f'(u_0) \times (u_1 - u_0) + f(u_0)$, on a donc les équivalences ci-dessous.

$$\begin{aligned}
0 = f'(u_0) \times (u_1 - u_0) + f(u_0) \quad &\iff f'(u_0) \times (u_1 - u_0) = -f(u_0) \\
&\iff u_1 - u_0 = \frac{-f(u_0)}{f'(u_0)} \\
&\iff u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}
\end{aligned}$$

On démontre de même que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

On a donc une suite définie par récurrence. On admet que cette suite tend vers α.

Si on applique la méthode de Newton à l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^5 + x - 150$, on obtient les valeurs données dans le tableau ci-dessous.

n	u_n
0	3
1	2,763 546 798 029 56
2	2,715 869 161 197 44
3	2,714 141 977 701 44

Tab. 4

3.3 Comparaison des méthodes de dichotomie et de Newton

Effectuons cette comparaison pour l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^5 + x - 150$, sur l'intervalle $[2\,;3]$.

En comparant les valeurs obtenues dans les tableaux 2 et 4, on constate que pour obtenir un encadrement au centième de α, il faut

- 7 étapes de calculs pour la dichotomie ;
- 3 étapes de calculs pour la méthode de Newton.

La méthode de Newton est donc beaucoup plus rapide, ce qui explique qu'elle soit utilisée dans les logiciels et les calculatrices.