Chapitre 7

Fonctions trigonométriques

I Exercices

7.1 Fonctions sinus et cosinus, propriétés

Exercice 7.1 (Courbe de la fonction sinus)

Le but de cet exercice est de tracer la courbe de la fonction cosinus et d'en étudier quelques propriétés

Avant de commencer l'exercice, vérifier que sa calculatrice est réglée en radians.

Sur TI : $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{mode}}$.

1. Tracer à l'écran de la calculatrice la représentation graphique de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
2. a) Quelles sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses ? Résoudre une équation pour répondre.
   b) Même question pour les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 1.
   c) Même question pour les abscisses des points de la courbe d'ordonnée -1.
3. a) La courbe a une symétrie. Préciser laquelle.
   b) Justifier en comparant $\cos(-x)$ et $\cos(x)$.
4. a) Qu'obtient-on si l'on translate la portion de courbe de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 0]$ par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$.
   b) Justifier par une propriété du cosinus.

Exercice 7.2 (Parité)

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, justifier si cette fonction est paire, impaire, ou ni paire ni impaire. Vérifier chaque fois à la calculatrice si la courbe est symétrique ou non.

- Fonction paire : $f(-x) = f(x)$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, paragraphe 7.3.b du cours.
- Fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$, symétrie par rapport à l'origine, paragraphe 7.2.b du cours.

1. $f(x) = \sin(2x)$ **2.** $f(x) = \cos(3x)$ **3.** $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **4.** $f(x) = x\sin x$

Exercice 7.3 (Périodicité)

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sin(2x)$

Nous allons comparer les périodes de ces deux fonctions.

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$, en fixant la graduation en abscisses à $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Tracer ensuite la courbe de la fonction g.
3. La période de la fonction sinus est 2π parce que pour tout réel x, $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
   a) Quelle semble être la période T de la fonction g ?
   b) Démontrer que ce nombre T est bien la période de la fonction g, c'est à dire démontrer que pour tout réel x, $g(x+T) = g(x)$.

Exercice 7.4 (Oscillateur mécanique non amorti)

Un solide est suspendu à un ressort, au repos. À cette position on considère que la hauteur y du centre de gravité du solide est $y = 0$. On le tire de 5 cm vers le bas et on le lâche. t représente le temps écoulé en secondes à partir de l'instant où on lâche le solide. La fonction f définie ci-dessous donne la hauteur y du centre de gravité du solide en fonction de t, autrement dit : $y = f(t)$.

$f(t) = 5\cos(2\pi t - \pi)$

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, en fixant la graduation en abscisses à 0,5.
2. Décrire le mouvement du solide pendant ces 4 secondes.
3. a) Calculer $f(0)$, $f(0,5)$ et $f(1)$.
   b) Que signifient ces résultats ?
4. a) Conjecturer la période T.
   b) Justifier par un calcul que la période est bien ce nombre T.

7.2 Calculs de dérivées, extrémum

Exercice 7.5

Le but de cet exercice est de déterminer la dérivée de la fonction sinus.

On rappelle que pour un nombre réel x fixé, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

1. Justifier par des calculs que pour tous réels x et h :
   $\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \sin(x) \times \dfrac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \times \dfrac{\sin(h)}{h}$
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les limites de $\dfrac{\cos(h)-1}{h}$ et de $\dfrac{\sin(h)}{h}$ lorsque h tend vers zéro. On admettra ces résultats.[1]
3. En déduire la limite de $\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$ lorsque h tend vers zéro. Le nombre x est fixé et la limite à donner est en fonction de x.
4. Quelle est donc la dérivée de la fonction sinus ?

Exercice 7.6

Le but de cet exercice est de déterminer la dérivée de la fonction cosinus.

1. Justifier par des calculs que pour tous réels x et h :
   $\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \cos(x) \times \dfrac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \times \dfrac{\sin(h)}{h}$

1. L'activité 2 page 175 du manuel Hyperbole fait démontrer ces résultats.

2. En déduire la limite de $\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$ lorsque h tend vers zéro. Le nombre x est fixé et la limite à donner est en fonction de x. On pourra réutiliser les résultats de la question **2.** de l'exercice 7.5.

3. Quelle est donc la dérivée de la fonction cosinus ?

Exercice 7.7

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = \sin x - \cos x$ **2.** $f(x) = x \sin x$ **3.** $f(x) = \cos^3 x = \big(\cos(x)\big)^3$ **4.** $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

Exercice 7.8

Lire la propriété 7.8 page 132, puis calculer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous.

1. $f(x) = \sin(4x)$ **2.** $f(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ **3.** $f(x) = 2\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

7.3 Études de fonctions

Exercice 7.9

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par $f(x) = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction f.

2. La fonction f atteint un maximum sur $[0\ ;\ \pi]$. Déterminer ce maximum et la valeur de x où il est atteint. Justifier.

Exercice 7.10

La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{3 + \cos x}$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.

1. Nous étudierons la fonction f sur $[-\pi\ ;\ 3\pi]$, mais cette fonction est en fait définie sur $\mathbb{R}$. Justifier pourquoi.

2. Démontrer que la fonction f est paire.

3. Démontrer que la fonction f est périodique, de période 2π.

4. **a)** Calculer la dérivée de f.

b) Étudier le signe de la dérivée sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, en utilisant le cercle trigonométrique et sans justifier.

5. **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

b) Compléter ce tableau de variations sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 0]$, sachant que la fonction f est paire.

c) Compléter ce tableau de variations sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$, sachant que la fonction f est périodique de période 2π.

6. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.

Exercice 7.11

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction ci-dessous.

La fonction f est définie par : $f(x) = 3\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{8}\ ;\ \dfrac{3\pi}{8}\right]$.

1. a) Calculer la dérivée de f.
   b) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   c) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{8}\ ;\ \frac{3\pi}{8}\right]$.
2. Calculer les images des valeurs remarquables et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\left[-\frac{\pi}{8}\ ;\ \frac{3\pi}{8}\right]$.

Exercice 7.12

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction ci-dessous.

La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. a) Indiquer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers zéro.
   b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Indication : justifier d'abord que pour tout réel x strictement positif, $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
2. a) Calculer la dérivée de f.
   b) On admet que l'équation $f'(x) = 0$ a une seule solution α sur l'intervalle $]0\ ;\ 2\pi]$.
   Avec la calculatrice, déterminer la valeur de α arrondie au centième près.
3. Sans justifier, dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ 2\pi]$.
4. Sur l'écran de la calculatrice, tracer les représentations graphiques de la fonction f et des fonctions u et v définies par $u(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ 6\pi]$.

Exercice 7.13

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 10\sin x$.

1. Sur l'écran de la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20\pi]$.
2. Conjecturer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer cette limite. Indication : justifier que pour tout réel x, $f(x) \geqslant x - 10$.

Exercice 7.14

Partie A

La fonction tangente est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Expliquer pourquoi la fonction tangente n'est définie ni en $-\dfrac{\pi}{2}$, ni en $\dfrac{\pi}{2}$.
2. La fonction tangente est-elle paire ou impaire ? Justifier.
3. Déterminer la limite de la fonction tangente lorsque x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ et $x < \dfrac{\pi}{2}$, et préciser l'asymptote.
4. Justifier le sens de variation de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Tracer le tableau de variation de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
   a) Compléter ce tableau sur $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ d'après les réponses aux questions **3.** et **4.**
   b) Compléter ce tableau sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$ d'après la réponse à la question **2.**

Partie B

La fonction tangente est en fait définie sur tout intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour tout entier k, notamment sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

1. Justifier que la fonction tangente est périodique de période π.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

7.4 Pour réviser

Chapitre 7 – Fonctions sinus et cosinus

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 466

- ex 5 p 177 : limite en zéro
- ex 9 p 179
- ex 12, 13 p 181

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 474

- ex 64, 65, 66 p 187
- ex 67 p 188
- ex 68 à 69 p 189
- L'ex 70 p 189 n'a pas son corrigé en fin de livre mais il y a une aide.

Chapitre 4 – Limites de fonctions

Ex 27, 30 p 99, corrigés page 464.

Ex 98 p 107, corrigé page 472.

II Cours

7.1 Rappels

7.1.a Triangle rectangle (3e)

Définition

Dans un triangle rectangle,

cosinus d'un angle aigu $= \dfrac{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

sinus d'un angle aigu $= \dfrac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

tangente d'un angle aigu $= \dfrac{\text{longueur du côté opposé à cet angle}}{\text{longueur du côté adjacent à cet angle}}$

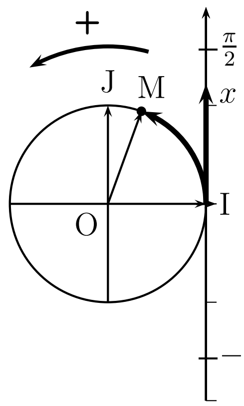
7.1.b Cercle trigonométrique (2de)

- Dans un repère orthonormé, on appelle cercle trigonométrique le cercle dont le centre est l'origine du repère et dont le rayon est 1.
- Sur ce cercle, le sens d'orientation positif est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

7.1.c Mesure d'un angle en radian (1re S)

Mesure en radians d'un angle orienté de vecteurs
Dans un repère orthonormé (O, I, J) un point M sur le cercle trigonométrique est associé à un nombre réel x.
On dit que le nombre réel x est une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Le radian est la mesure de l'angle orienté de vecteur $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ tel que le point M sur le cercle trigonométrique est associé à 1.



7.1.d Radian et degré (1re S)

$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$ $\quad 1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57,3° \quad 1° = \dfrac{\pi \text{ rad}}{180} \approx 0,0175 \text{ rad}$

Pour convertir de degrés en radians ou inversement, on utilise le tableau de proportionnalité ci-dessous. Pour un angle donné, d est une mesure de cet angle en degrés et r la mesure correspondante en radians.

Mesure en degrés	180	d
Mesure en radians	π	r

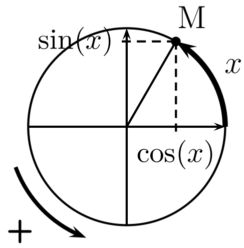
7.1.e Les mesures d'un angle orienté et sa mesure principale (1re S)

- Si x est une mesure en radians d'un angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, alors tous les nombres réels de la forme $x + 2k\pi$ où k est un entier relatif, sont également des mesures en radians de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Parmi les mesures d'un angle $(\vec{u}, \vec{v})$, la seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ est appelée mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

7.1.f Cosinus et sinus d'un nombre réel (2de)

Définition 7.1

Un point M du cercle trigonométrique est associé à un nombre réel x.
- on appelle cosinus de x l'abscisse du point M ;
- on appelle sinus de x l'ordonnée du point M.



Propriétés

Pour tout nombre réel x, $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ $\quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ $\quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

Valeurs remarquables

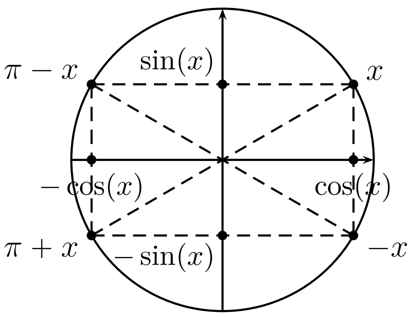
x (°)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x (rad)	0	30°	45°	60°	90°
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

7.1.g Cosinus et sinus d'angles associés (1re S)

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$$

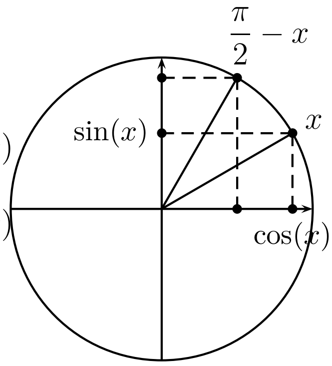
$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{cases}$$

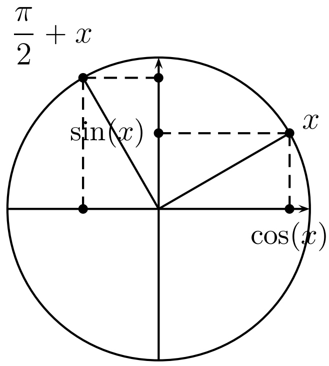


$$\begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \end{cases}$$

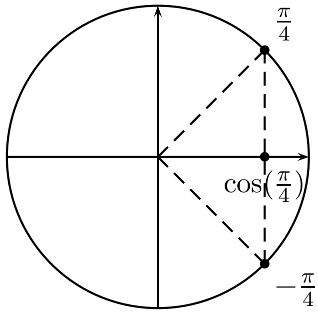


$$\begin{cases} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \end{cases}$$



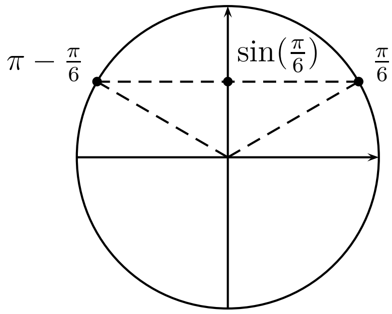
7.1.h Équations $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$ (1re S)

Exemple 1
Résolution de l'équation $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
On schématise cette équation sur le cercle trigonométrique.



Les solutions sont les nombres réels de la forme $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, où k est un nombre entier relatif.

Exemple 2
Résolution de l'équation $\sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.
On schématise cette équation sur le cercle trigonométrique.
Calcul : $\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{6\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$



Les solutions sont les nombres réels de la forme $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, où k est un nombre entier relatif.

7.1.i Formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus. (1re S)

Propriété – Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\quad$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\quad$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Propriété – Formules de duplication

Pour tous nombres réels a et b : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\quad$ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ $\quad$ $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

7.2 La fonction sinus

7.2.a Dérivée de la fonction sinus

Propriété 7.1

La dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus. Autrement dit pour tout réel x : $\sin'(x) = \cos(x)$.

Un commentaire du programme préconise de faire le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$.

Propriété 7.2

La limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0 est égale au nombre dérivé de la fonction sinus en zéro, qui est égal à 1.
Autrement dit : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \sin'(0) = 1$

Démonstration

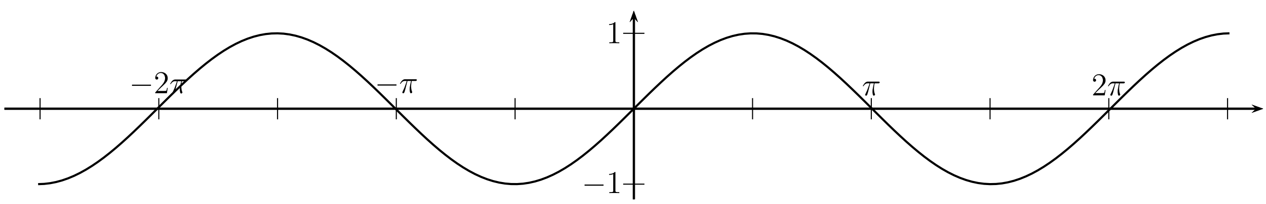
On sait d'après le cours sur les dérivées que le nombre dérivé d'une fonction f en a est $f'(a)$ et que $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$

Appliquons cela en remplaçant la fonction f par la fonction sinus, en remplaçant a par zéro, et h par x.

Cela nous donne : $\sin'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(0+x)-\sin(0)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$ or $\sin'(0) = \cos(0) = 1$.

On obtient donc bien : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \sin'(0) = 1$.

7.2.b Représentation graphique de sinus



Propriété 7.3

La courbe représentative de la fonction sinus dans un repère du plan est symétrique par rapport à l'origine de ce repère.

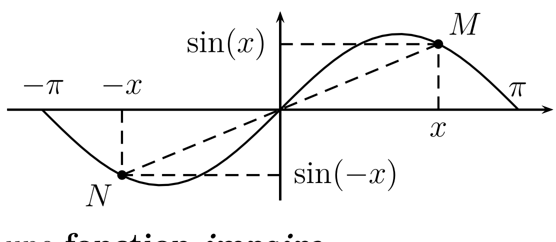
Démonstration et figure

Appelons $\mathscr{C}$ la courbe qui représente la fonction sinus.

$M(x\ ;\ \sin(x))$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse x.

$N(-x\ ;\ \sin(-x))$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse $-x$.

On sait d'après le cours de première que pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$, par conséquent les coordonnées de N sont $N(-x\ ;\ -\sin(x))$.
Donc les points M et N sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

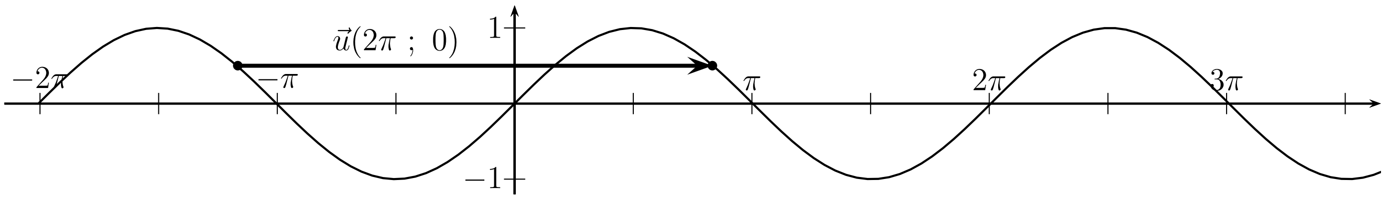


Vocabulaire : une fonction qui a cette propriété s'appelle une **fonction *impaire***.

Propriété 7.4

Si dans un repère du plan on translate la courbe représentative de la fonction sinus par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$, on obtient alors la même courbe.

Figure



Remarques

- Cette propriété vient du fait que pour tout réel x, $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$.
- On dit que la courbe de la fonction sinus est *invariante* par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$.
- La propriété ci-dessus reste vraie pour toute translation de vecteur $\vec{u}(2k\pi\ ;\ 0)$ où k est un entier.
- Une fonction qui a cette propriété s'appelle une **fonction *périodique*** de période 2π.

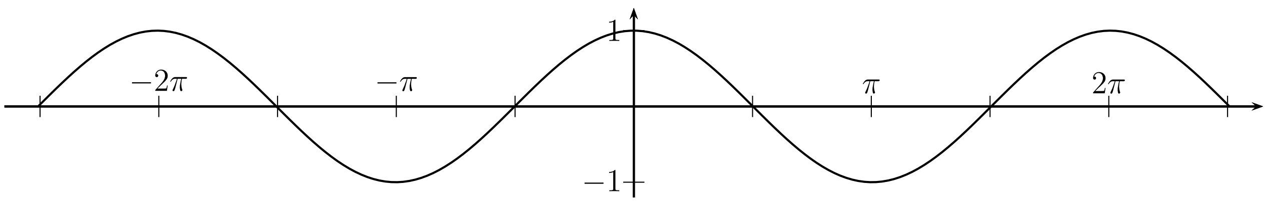
7.3 La fonction cosinus

7.3.a Dérivée de la fonction cosinus

Propriété 7.5

La dérivée de la fonction cosinus est la fonction (– sinus).
Autrement dit pour tout réel x : $\cos'(x) = -\sin(x)$.

7.3.b Représentation graphique de cosinus



Propriété 7.6

La courbe représentative de la fonction cosinus dans un repère du plan est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de ce repère.

Démonstration et figure

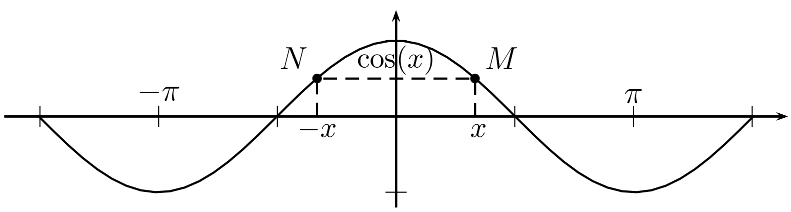
Appelons $\mathscr{C}$ la courbe qui représente la fonction cosinus.

$M(x\ ;\ \cos(x))$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse x.

$N(-x\ ;\ \cos(-x))$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse $-x$.

On sait d'après le cours de première que pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$, par conséquent les coordonnées de N sont $N(-x\ ;\ \cos(x))$.

Donc les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées de ce repère.

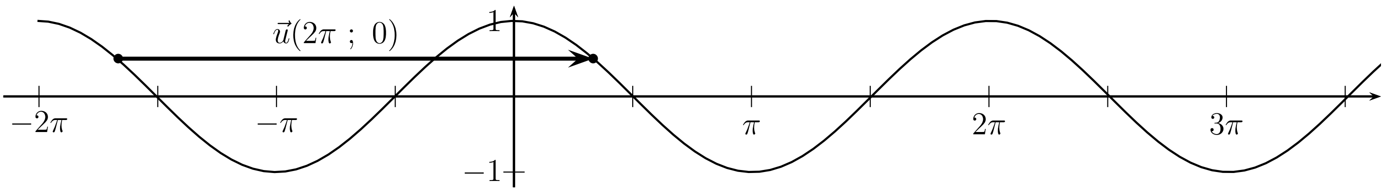


Vocabulaire : une fonction qui a cette propriété s'appelle une **fonction *paire***.

Propriété 7.7

Si dans un repère du plan on translate la courbe représentative de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$, on obtient alors la même courbe.

Figure



Remarques

- Cette propriété vient du fait que pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- On dit que la courbe de la fonction cosinus est *invariante* par la translation de vecteur $\vec{u}(2\pi\ ;\ 0)$.
- La propriété ci-dessus reste vraie pour toute translation de vecteur $\vec{u}(2k\pi\ ;\ 0)$ où k est un entier.
- Autrement dit la fonction cosinus, comme la fonction sinus, est *périodique* de période 2π.

7.4 Dérivée de $\cos(u)$ et de $\sin(u)$

Propriété 7.8

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors les fonctions $\cos(u)$ et $\sin(u)$ sont dérivables sur I, et on a : $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$.

7.5 Utilisation de la calculatrice

Il est indiqué ci-dessous comment régler sa calculatrice en radians ou en degrés, et, pour les courbes de fonctions trigonométriques, comment obtenir le zoom trigonométrique.

TI 82

- Réglage en radians ou en degrés : touche mode.
- Zoom trigonométrique, qui permet d'obtenir un repère orthonormé sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$:
  zoom `7 ZTrig`,

CASIO

- Réglage en radians : SHIFT [SET UP], `Angle : Rad` (F2).
- Zoom trigonométrique qui permet d'obtenir un repère non orthonormé sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$:
  MENU GRAPH, puis SHIFT [V-Window], et, dans la fenêtre, on peut choisir F2 (`TRIG`).

7.6 Fonctions paires, impaires, et périodiques

Le programme de terminale S ne prévoit pas de développer ce qui concerne les fonctions paires, impaires, et périodique.

Par conséquent ce paragraphe n'est pas à connaître par cœur.

7.6.a Fonction paire

Définition 7.2 (Fonction paire)

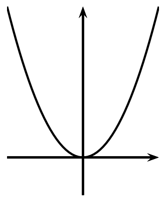
Dire qu'une fonction f est paire signifie que pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

Propriété 7.9 (Courbe d'une fonction paire)

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple 7.1 (La fonction carré)

La fonction définie par $f(x) = x^2$ est paire, en effet, pour tout réel x :
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
Comme on le voit ci-contre, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Remarque

On a vu au paragraphe 7.3 que la fonction cosinus est paire, ainsi, l'exemple 7.1 donne un autre exemple de fonction paire.

7.6.b Fonction impaire

Définition 7.3 (Fonction impaire)

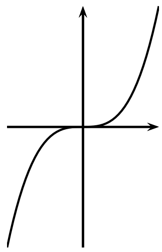
Dire qu'une fonction f est paire signifie que pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 7.10 (Courbe d'une fonction impaire)

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine de ce repère.

Exemple 7.2 (La fonction cube)

La fonction définie par $f(x) = x^3$ est impaire, en effet, pour tout réel x :
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
Comme on le voit ci-contre, dans un repère orthogonal, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Remarque

On a vu au paragraphe 7.2 que la fonction sinus est impaire, ainsi, l'exemple 7.2 donne un autre exemple de fonction impaire.

7.6.c Fonction périodique

Propriété 7.11 (Fonction périodique)

Si une fonction f est périodique de période T alors pour tout réel x, $f(x+T)=f(x)$.

Propriété 7.12 (Courbe d'une fonction périodique)

Si dans un repère du plan on translate la courbe représentative d'une fonction de période T par la translation de vecteur $\vec{u}(T\ ;\ 0)$, on obtient alors la même courbe.

Exemple 7.3

La fonction définie par $f(x)=\cos(4x)$ est périodique, de période $\frac{\pi}{2}$, en effet, pour tout réel x :

$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\times\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos\left(4\times x+4\times\frac{\pi}{2}\right)=\cos(4x+2\pi)$.

Or, $\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha)$.

On a donc : $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(4x+2\pi)=\cos(4x)=f(x)$.