Chapitre 18

Annexes

A Équations et inéquations

1. **Exemples d'équations et inéquations que l'on peut résoudre de manière exacte**
   Au collège et au lycée, on apprend à résoudre de manière exacte différents types d'équations ou d'inéquations comme
   - $5x + 7 = 9$
   - $x^2 - 5x + 4 = 0$
   - $(x - 7)(x + 1) = 0$
   - $3x - 5 < x + 4$
   - $x^2 - 5x + 4 \geqslant 7x + 6$
   - $\mathrm{e}^{6x+4} = 9$
   - $\ln(x) > 2$
   - $1,04^n > 100$
2. **Équations et inéquations que l'on peut résoudre de manière approchée**
   Certaines équations ne peuvent pas être résolue de manière exacte comme $x^7 + x = 1\,000$, mais on peut en calculer une solution approximative.

On ne peut pas définir les équations qu'on sait résoudre de manière exacte ou pas, mais ce qui va suivre rappelle les propriétés et méthodes à connaître.

A.1 Résolution exacte d'une équation ou d'une inéquation

A.1.a Équation ou inéquation du premier degré à une inconnue

La résolution des équations et inéquations du premier degré à une inconnue repose sur les propriétés page suivante.

Propriété 18.1 (Règles sur les égalités et inégalités)

Pour des nombres a, b, c
- si $a = b$, alors $a + c = b + c$;
- si $a < b$, alors $a + c < b + c$;
- si $a = b$, alors $a \times c = b \times c$;
- si $a < b$ et $c > 0$, alors $a \times c < b \times c$;
- si $a < b$ et $c < 0$, alors $a \times c > b \times c$;

autrement dit,
- une égalité reste vraie si
  - on ajoute le même nombre aux deux membres de cette égalité
  - on multiplie par le même nombre les deux membres de cette égalité
- on ne change pas le sens d'une inégalité si
  - on ajoute le même nombre aux deux membres de cette inégalité
  - on multiplie par le même nombre positif les deux membres de cette égalité
- on change le sens d'une inégalité si on multiplie par le même nombre négatif les deux membres de cette égalité.

Exemple 18.1 (Résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue)

$$\begin{array}{lll} & 2x - 7 & \geqslant 5x + 9 \\ \iff & 2x & \geqslant 5x + 9 + 7 \quad \text{on a ajouté 7 aux deux membres de cette inégalité} \\ \iff & -3x & \geqslant 16 \quad \text{on a ajouté } -5x \text{ aux deux membres de cette inégalité} \\ \iff & x & \leqslant -\dfrac{16}{3} \quad \text{on a multiplié par } -\dfrac{1}{3} \text{ les deux membres de cette inégalité} \end{array}$$

A.1.b Équation produit

La résolution d'une équation produit repose sur la propriété ci-dessous.

Propriété 18.2 (Produit nul)

Pour deux nombres A et B, $A \times B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.
Autrement dit un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Étudions maintenant un exemple.

Exemple 18.2 (Équation produit)

$$\begin{aligned} (x-1)(x+4)(3x-8) = 0 \quad & \iff x - 1 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 \text{ ou } 3x - 8 = 0 \\ & \iff \boxed{x = 1 \text{ ou } x = -4 \text{ ou } x = \frac{8}{3}} \end{aligned}$$

A.1.c Équation ou inéquation du second degré à une inconnue

Une équation ou inéquation du second degré à une inconnue fait tout de suite penser au discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, mais dans certains cas simples, on peut simplement utiliser une factorisation, puis résoudre une équation-produit, comme on peut le voir dans les deux exemples ci-dessous.

Exemple 18.3

$$5x^2 - 3x = 0 \iff x(5x - 3) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 5x - 3 = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5}}$$

Exemple 18.4

$$x^2-7=0 \iff x^2-\sqrt{7}^2=0 \iff (x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=0 \iff x-\sqrt{7}=0 \text{ ou } x+\sqrt{7}=0$$
$$\iff \boxed{x=\sqrt{7} \text{ ou } x=-\sqrt{7}}$$

Propriété 18.3 (Équation $ax^2+bx+c=0$)

$ax^2+bx+c=0 \qquad \Delta=b^2-4ac$
- Si $\Delta<0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta=0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution qui est $x_0=-\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta>0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions qui sont $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

A.1.d Exponentielle et logarithme

Les équations $\ln(x)=a$ et $\mathrm{e}^x=a$ sont traitées au chapitre 9 (Logarithmes), au paragraphe 9.1.d page 158.

Les équations du type $a^n=b$ et les inéquations du type $a^n<b$ sont aussi traitées au chapitre 9 (Logarithmes), au paragraphe 9.2.c page 159.

A.2 Résolution approchée d'une équation

Voir documents
- *Méthode de résolution approchée d'une équation*
- *Utilisation du solveur de la TI 82 Advanced*

B Signe d'une expression

Remarque importante :
- Pour étudier plus facilement le signe d'une expression penser à **factoriser** cette expression si c'est possible.
- Si cette expression contient des écritures fractionnaires, penser à **réduire au même dénominateur**.

Méthode 18.1 (Signe d'une expression $ax+b$ $(a\neq 0)$)

- résoudre l'équation $ax+b=0$, on appelle x_0 sa solution ;
- le signe de $ax+b$ est alors donné par le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

Méthode 18.2 (Signe d'une expression ax^2+bx+c)

La résolution d'une équation $ax^2+bx+c=0$ est rappelée par la propriété 18.3 page 281.

- Si $\Delta<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de a	

- Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

Propriété 18.4 (Signe de la puissance d'une expression)

Pour une expression $f(x)$
- si n est un entier pair, le signe de $\big(f(x)\big)^n$ est positif ;
- si n est un entier impair, le signe de $\big(f(x)\big)^n$ est le signe de $f(x)$.

Exemple 18.5 (Étude du signe d'une expression)

Étude du signe de l'expression $\dfrac{(x+2)(x-4)^3}{(x-1)^2}$ selon les valeurs de x.

Pour tout réel x, l'expression $(x-1)^2$ est positive. D'autre part, comme 3 est impair, l'expression $(x-4)^3$ est du signe de $(x-4)$.

Donc le signe de l'expression $\dfrac{(x+2)(x-4)^3}{(x-1)^2}$ selon les valeurs de x est du signe de l'expression $(x+2)(x-4)$.

On obtient donc le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{(x+2)(x-4)^3}{(x-1)^2}$		$+$	|	$-$	||	$-$	|	$+$	

C Récapitulation sur les fonctions

C.1 Définition d'une fonction

- **Sous la forme $f(x) = \cdots$**
  Une fonction est souvent définie par une phrase comme :
  « la fonction f est définie par $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ ».
- **Sous la forme $x \longmapsto \cdots$**
  On voit parfois aussi une expression comme « la fonction $x \longmapsto 3x^2 - 5x + 4$ », qui se lit « la fonction qui à x associe $3x^2 - 5x + 4$ ».

C.2 Étude d'une fonction

Voici le plan d'étude d'une fonction. On retrouve souvent ces questions dans les exercices sur les fonctions. Les points **1.** à **5.** sont détaillés plus bas.

Plan d'étude d'une fonction

1. Parité, périodicité
2. Limites
3. Sens de variation
   - Calculer la dérivée
   - Étudier le signe de la dérivée
4. Calculer certaines valeurs remarquables
5. Dresser le tableau de variation

C.2.a Parité, périodicité

Les fonctions paires, impaires, périodiques sont abordées dans le chapitre 7 (Fonctions trigonométriques) au paragraphe 7.6 page 133.

C.2.b Limites

Voir chapitre 3 (Limite et continuité d'une fonction).

C.2.c Calculer la dérivée

Tab. 18.1

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x) = \cdots$	$f'(x) = \cdots$	f dérivable sur $\cdots$
k constante	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$, $\quad \mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Tab. 18.2

Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Dérivée	Condition
$(u+v)' = u' + v'$	
$(ku)' = k \times u'$	
$(uv)' = u'v + v'u$	
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Tab. 18.3

Dérivées des fonctions composées

Dérivée	Condition
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	u ne s'annule pas sur I
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	
$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$	
$\big(\ln(u)\big)' = \dfrac{u'}{u}$	$u > 0$ sur I
$\big(\cos(u)\big)' = -u'\sin(u)$	
$\big(\sin(u)\big)' = u'\cos(u)$	

C.2.d Étudier le signe de la dérivée

Les différentes méthodes et propriétés pour étudier le signe d'une expression $E(x)$ selon les valeurs de x sont rappelées dans l'annexe B page 281.

C.2.e Utilisation de la calculatrice

Méthode 18.3 (Afficher un tableau de valeurs à la calculatrice)

- Dans l'éditeur de fonctions (touche $\boxed{\text{f(x)}}$), saisir la fonction f.
- Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [déf table]
- Dans la fenêtre, sur la ligne `Indpnt`, aller sur `Auto` et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$
- Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [table]

Exemple 18.6 (Calculer l'image de nombres à la demande à la calculatrice)

La fonction f est définie par $f(x) = -4x^2 + 9x + 37$ et on veut calculer $f(-5)$, $f(4)$ et $f(12)$.

- Dans l'éditeur de fonctions (touche $\boxed{\text{f(x)}}$), saisir la fonction f.
- Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [déf table]
- Dans la fenêtre, sur la ligne `Indpnt`, aller sur `Dem` et appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$
- Appuyer sur $\boxed{\text{2nde}}$ [table]
- Dans la colonne `X`,
  - saisir `-5`, puis appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$, et dans la colonne `Y`, on voit `-108`
  - saisir `4`, puis appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$, et dans la colonne `Y`, on voit `9`
  - saisir `12`, puis appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$, et dans la colonne `Y`, on voit `-431`

On a donc : $f(-5) = -108 \qquad f(4) = 9 \qquad f(12) = -431$.

Exemple 18.7 (Courbe d'une fonction à la calculatrice)

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 6x + 4$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 10]$.

- Dans l'éditeur de fonctions (touche $\boxed{\text{f(x)}}$), saisir la fonction f.
- Dans fenêtre, saisir les valeurs de l'intervalle : Xmin=-2 et Xmax=10.
- Dans Zoom, choisir ZMinMax ou AjustZoom ou ZoomFit
- Appuyer sur $\boxed{\text{entrer}}$

Exemple 18.8 (Maximum d'une fonction à la calculatrice)

On veut connaître le maximum de la fonction f définie par :

$f(x) = -2x^3 + 8x^2 + 22x - 28$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.

- Afficher la courbe de la fonction f à la calculatrice.
  Réglage de la fenêtre :
  `Xmin=0` `Xmax=6` `Xgrad=1`
  `Ymin=-40` `Ymax=80` `Ygrad=10`
- Appuyer sur 2nde [calculs]
- Descendre sur `maximum`, et appuyer sur entrer.
- On voit `Borne Inf` : placer le curseur un peu à gauche du sommet et appuyer sur entrer.
- On voit `Borne Sup` : placer le curseur un peu à droite du sommet et appuyer sur entrer.
- On voit `Valeur Init` : appuyer sur entrer.
- On voit :
  `Maximum`
  `X=3.66667` `Y=61.62963`

Donc le maximum de la fonction f est environ 61,63 et il est atteint pour $x \approx 3,67$

C.2.f Positions relative de deux courbes

Définition 18.1

Pour deux fonctions f et g définies sur un intervalle I,

- Dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I signifie que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) > g(x)$.
- Dire que la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I signifie que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) < g(x)$.

Méthode 18.4

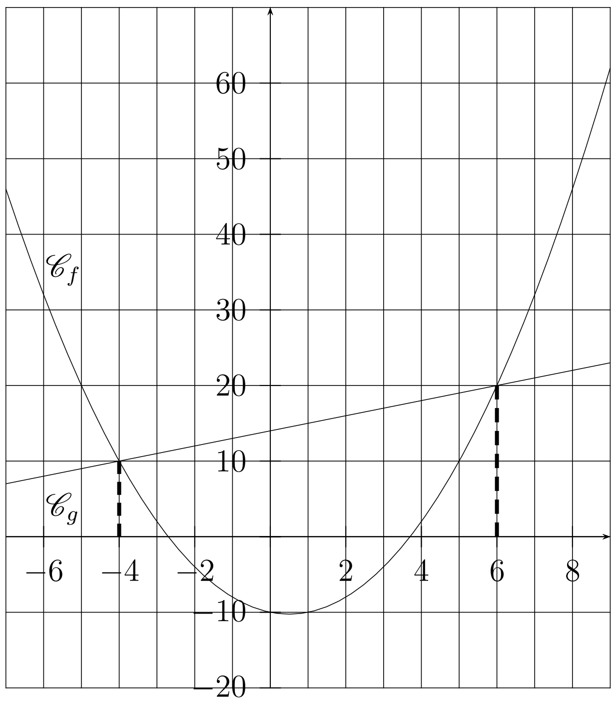
Pour connaître les positions relatives de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur un intervalle I, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x.

- Si pour tout réel x de l'intervalle I on a $f(x) - g(x) > 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.
- Si pour tout réel x de l'intervalle I on a $f(x) - g(x) < 0$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle I.

Exemple 18.9

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - x - 10$ et la fonction g est définie par $g(x) = x + 14$.

Ces deux fonctions sont représentées graphiquement par les courbes respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ (la courbe $\mathscr{C}_g$ est une droite).
On veut justifier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Étudions donc le signe de $f(x) - g(x)$ selon les valeurs de x.



$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - x - 10 - (x + 14) \\ &= x^2 - x - 10 - x - 14 \\ &= x^2 - 2x - 24 \end{aligned}$$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-24) = 100$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

$$x_1 = \frac{-(-2) - 10}{2 \times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + 10}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6$$

x	$-\infty$	-4		6		$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$	$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$		$\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$		$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$	

C.3 Fonctions ayant des paramètres

Exemple 18.10

La fonction f est définie par $f(x) = ax^2 + bx + 4$, et elle est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$.
On dit que a et b sont des **paramètres**. Déterminer a et b, sachant que $f(2) = 0$ et $f'(0) = -3$.

Puisque $f(x) = ax^2 + bx + 4$ et $f(2) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(2) = 0 &\iff a \times 2^2 + b \times 2 + 4 = 0 \\ &\iff 4a + 2b + 4 = 0 \end{aligned}$$

On sait aussi que $f'(0) = -3$, mais calculons d'abord $f'(x)$.

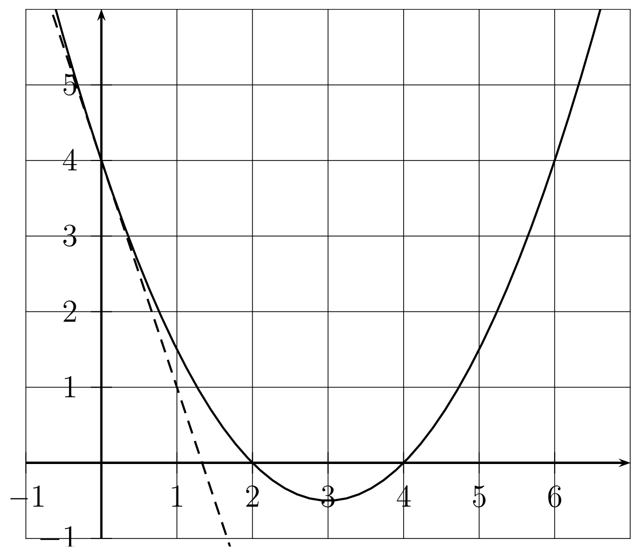
$f'(x) = a \times 2x + b \times 1 + 0 = 2ax + b$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(0) = -3 &\iff 2a \times 0 + b = -3 \\ &\iff b = -3 \end{aligned}$$

or, $4a + 2b + 4 = 0$, on a donc :

$$\begin{aligned} 4a + 2 \times (-3) + 4 = 0 &\iff 4a - 2 = 0 \\ &\iff 4a = 2 \\ &\iff a = \frac{2}{4} = 0,5 \end{aligned}$$



On obtient finalement : $\boxed{f(x) = 0,5x^2 - 3x + 4}$.

Exemples d'exercices de baccalauréat comportant une fonction avec paramètres.

- Baccalauréat S, Antilles-Guyane, juin 2019, exercice 1 : $f(x) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$
- Baccalauréat S, Pondichéry, mai 2018, exercice 1 : $f(t) = a\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b$
- Baccalauréat S, Amérique du Nord, juin 2018, exercice 2 : $f(x) = bx + 2\ln(1-x)$
- Baccalauréat S, Asie, juin 2018, exercice 1 : $f_p(x) = \dfrac{100p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-pt}}$

C.4 Famille de fonctions

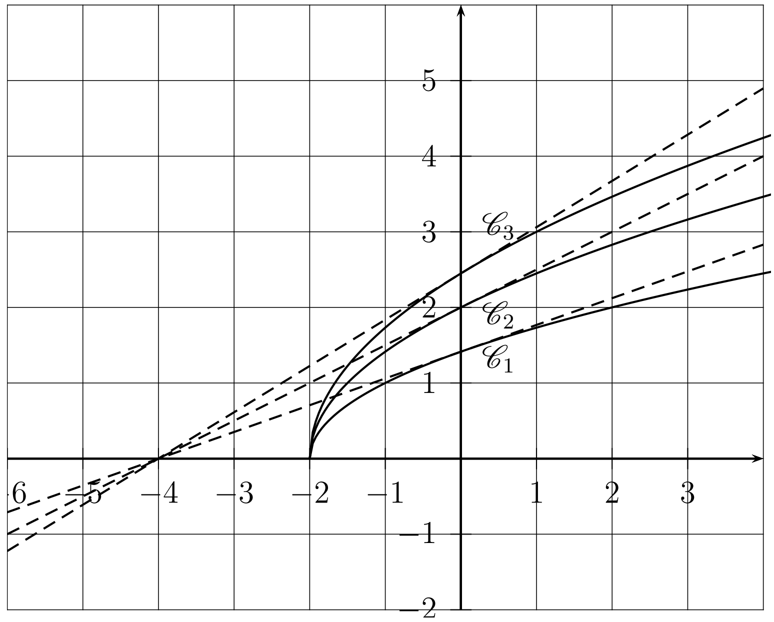
Exemple 18.11

Soit n un entier naturel, on considère les fonctions f_n définies sur $[-2\ ;\ +\infty[$ par : $f_n(x) = \sqrt{n(x+2)}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sont tracées ci-contre.

On dit que l'ensemble des fonctions f_n constituent une **famille de fonctions**.



Énoncé

1. **Point commun aux courbes $\mathscr{C}_n$**
   - **a)** Il semble que les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ aient un point commun A. Donner ses coordonnées.
   - **b)** Démontrer que pour tout entier naturel n, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par A.
2. **Point commun aux tangentes au point d'abscisse zéro.**
   Les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ au point d'abscisse zéro sont tracées en pointillés.
   - **a)** Il semble que ces trois tangentes aient un point commun B. Donner ses coordonnées.
   - **b)** Démontrer que pour tout entier naturel n, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro passe par B.

Corrigé

1. **Point commun aux courbes $\mathscr{C}_n$**
   - **a)** Il semble que le point commun aux courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ soit $\boxed{\text{le point } A(-2\ ;\ 0)}$.
   - **b)** Démontrer que pour tout entier naturel n, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par A.
     Pour tout entier naturel n, on a : $f_n(-2) = \sqrt{n \times (-2+2)} = \sqrt{0} = 0$, donc, pour tout entier naturel n, la courbe $\mathscr{C}_n$ passe par $A(-2\ ;\ 0)$.
2. **Point commun aux tangentes au point d'abscisse zéro.**
   - **a)** Il semble que le point commun aux tangentes au point d'abscisse zéro soit $\boxed{\text{le point } B(-4\ ;\ 0)}$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro passe par B.

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro est :
$y = f_n'(0) \times (x - 0) + f_n(0)$.
Calculons maintenant $f_n(0)$ et $f_n'(0)$.
$f_n(0) = \sqrt{n \times (0 + 2)} = \sqrt{2n}$.
Pour calculer $f_n'(0)$, calculons d'abord $f_n'(x)$:
$u(x) = n(x + 2) = nx + 2n \quad u'(x) = n \quad \text{or} \quad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Donc $f_n'(x) = \dfrac{n}{2\sqrt{n(x+2)}}$ donc $f_n'(0) = \dfrac{n}{2\sqrt{2n}}$
Ainsi l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro est :
$y = \dfrac{n}{2\sqrt{2n}}x + \sqrt{2n}$.
Pour vérifier si le point $B(-4\ ;\ 0)$ appartient bien à cette tangente, remplaçons x par -4 dans l'équation ci-dessus.
$y = \dfrac{n}{2\sqrt{2n}} \times (-4) + \sqrt{2n} = \dfrac{-4n}{2\sqrt{2n}} + \sqrt{2n} = \dfrac{-2n}{\sqrt{2n}} + \sqrt{2n}$
Or, $2n = \sqrt{2n} \times \sqrt{2n}$
Donc, $y = \dfrac{-\sqrt{2n} \times \sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} + \sqrt{2n} = -\sqrt{2n} + \sqrt{2n} = 0$
Donc, le point commun à toutes les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse zéro est bien le point $B(-4\ ;\ 0)$.

Exemples d'exercices de baccalauréat comportant une famille de fonctions

- Baccalauréat S, Liban, mai 2018, exercice 4 : $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$
- Baccalauréat S, Liban, juin 2017, exercice 3 : $f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}$
- Baccalauréat S, Liban, mai 2016, exercice 3 $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n\mathrm{e}^{1-x}}$

D Polynômes

Soit n un entier naturel, un polynôme de degré n est une expression de la forme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, par exemple :
- $P(x) = 3x - 7$ (une expression affine est un polynôme de degré 1) ;
- $P(x) = 3x^2 - 2,6x + 7,2$ (polynôme de degré 2) ;
- $P(x) = x^6 - 4x^3 + 3x^2 - 0,9x - 11,3$ (polynôme de degré 6).

Les polynômes ne sont plus au programme de terminale S, pourtant ils apparaissent dans des sujets, soit en tant que fonction, soit avec des complexes.

La propriété ci-dessous n'est plus au programme de terminale S, mais elle donne l'explication de certaines questions posées dans des exercices.

Propriété 18.5 (Factorisation d'un polynôme)

Pour un polynôme P, si a est solution de $P(x) = 0$, c'est à dire si $P(a) = 0$,
alors, il existe $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x - a)Q(x)$.

La propriété page suivante, qui peut paraître évidente, est utile aussi comme on va le voir plus loin.

Propriété 18.6 (Polynômes égaux – Identification)

Soient deux polynômes $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$, et $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$.

Si, pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$, alors
- $m = n$ (ils sont de même degré) ;
- $a_n = b_n$, …, $a_0 = b_0$ (les coefficients des termes de même degré sont égaux)

Exemple 18.12 (Factorisation d'un polynôme de degré 3)

Énoncé

On considère le polynôme $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 93x + 84$.

Le but des questions qui suivent est de factoriser $P(x)$

1. Calculer $P(1)$.

2. On admet qu'il existe des nombres réels a, b, c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
Déterminer les nombres a, b, c.

3. Factoriser $P(x)$.

Correction

1. $P(1) = 3 \times 1^3 + 6 \times 1^2 - 93 \times 1 + 84 = \boxed{0}$.

2. $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$. Déterminons les nombres a, b, c.
Développons le polynôme P :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned}$$

Nous avons donc : $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 93x + 84 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.
Par conséquent, par identification, nous obtenons les égalités :
$a = 3 \;\; (1) \qquad b - a = 6 \;\; (2) \qquad c - b = -93 \;\; (3) \qquad -c = 84 \;\; (4)$
D'après les égalités (1) et (2), on a : $b - 3 = 6$, donc $b = 6 + 3 = 9$.
D'après l'égalité (4), $c = -84$.
Ainsi : $\boxed{P(x) = (x-1)(3x^2 + 9x - 84)}$.

3. Factorisation de $P(x)$.
On sait que $P(x) = (x-1)(3x^2 + 9x - 84)$.
Factorisons l'expression $3x^2 + 9x - 84$ qui est un trinôme du second degré.
$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-84) = 1\,089 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1\,089} = 33$

$$x_1 = \frac{-9 - 33}{2 \times 3} = \frac{-42}{6} = -7 \qquad x_2 = \frac{-9 + 33}{2 \times 3} = \frac{24}{6} = 4$$

On a donc : $3x^2 + 9x - 84 = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3\big(x - (-7)\big)\big(x - 4\big) = 3(x+7)(x-4)$
On obtient finalement : $P(x) = (x-1) \times 3(x+7)(x-4) = \boxed{3(x-1)(x+7)(x-4)}$.

Remarques
- À la question **1.**, on constate que $P(1) = 0$, et à la question **2.** on admet que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
  Cela s'explique par la propriété 18.5 page 288.
- Dans la correction de la question **2.**, on obtient :
  $P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 93x + 84 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ et on en déduit par identification que : $a = 3 \;\; (1) \qquad b - a = 6 \;\; (2) \qquad c - b = -93 \;\; (3) \qquad -c = 84 \;\; (4)$.
  Cela est justifié par la propriété 18.6.page 289.