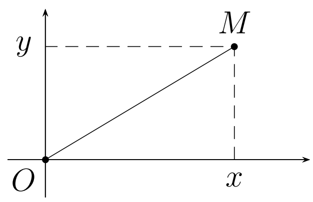
Chapitre 10

Compléments sur les complexes

I Exercices

10.1 Module et arguments

Exercice 10.1 (Module d'un complexe)
Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ un point M a pour affixe $z = x + y\mathrm{i}$.
Écire l'expression de la distance OM en fonction de x et y.



On appelle **module de** z cette distance et on la note $|z|$.

Exercice 10.2
Calculer les modules des complexes suivants (valeurs exactes) :

$z_1 = 3 + 4\mathrm{i} \qquad z_2 = 6 - \mathrm{i} \qquad z_3 = -7 \qquad z_4 = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

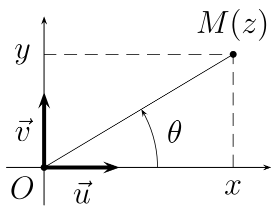
Exercice 10.3
On considère le complexe $z = x + y\,\mathrm{i}$.

1. Calculer le produit $z\overline{z}$.
2. Que constate-t-on ?

Exercice 10.4 (Forme trigonométrique d'un complexe)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$. Le point M a pour affixe $z = x + y\mathrm{i}$ et θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.

Consigne : écrire z en fonction de $|z|$, de $\cos\theta$, et de $\sin\theta$.

Indication : quelques vieux souvenirs de collège ...



- L'expression obtenue s'appelle la **forme trigonométrique** d'un nombre complexe.
- θ s'appelle un **argument** du nombre complexe z.

COURS : *avant de passer aux exercices suivants, lire le paragraphe 10.1 jusqu'à la définition 10.3. à propos de* ***module, argument, forme trigonométrique****.*

Exercice 10.5

Le programme indique qu'un élève doit savoir passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.

Transformer sous la forme trigonométrique le nombre complexe : $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

La méthode et un exemple sont donnés dans le cours juste après la définition 10.3 page 171.

Exercice 10.6

Transformer sous la forme trigonométrique le nombre complexe : $z = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

Exercice 10.7

On considère le nombre complexe : $z = -4 + 4\mathrm{i}$.

1. Tracer un repère et placer le point M d'affixe z. Cela facilitera la détermination d'un argument de z.
2. Voici maintenant des indications pour transformer z sous la forme trigonométrique.
   a) Justifier par un calcul que $|z| = 4\sqrt{2}$.
   b) Justifier ensuite par des calculs que $z = 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   c) Justifier enfin que $z = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
   d) Écrire z sous la forme trigonométrique.

Exercice 10.8

Transformer sous la forme trigonométrique les nombres complexes ci-dessous.

Pour les questions 2 à 6 tracer un repère et placer les points des affixes indiqués.

1. $z = 4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$. **2.** $z = 5$ **3.** $z = -7$ **4.** $z = 4\mathrm{i}$ **5.** $z = -3\mathrm{i}$ **6.** $z = 5 - 5\mathrm{i}$

Exercice 10.9

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous.

1. $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **2.** $7\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$ **3.** $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

4. $3(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$ **5.** $6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

10.2 Module, arguments et géométrie

Exercice 10.10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

A et B sont les points d'affixes respectifs $z_A = 1 + 3\mathrm{i}$ et $z_B = 3 + 5\mathrm{i}$.

1. Tracer la figure.
2. Déterminer le module (sous la forme $a\sqrt{2}$) et un argument de $z_B - z_A$.
3. Préciser ce que représentent les deux résultats précédents sur la figure.
4. Compléter la figure pour faire apparaître l'argument trouvé en 2.

COURS : *paragraphe 10.4*

Exercice 10.11

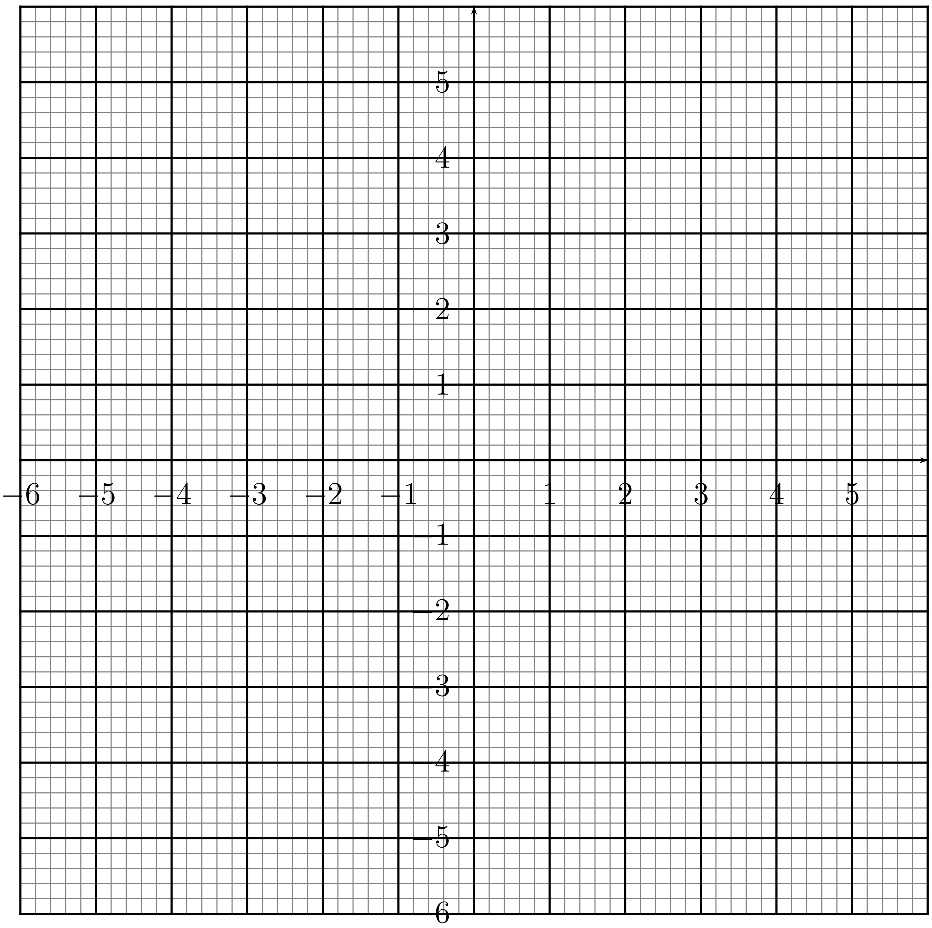
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

A et B sont les points d'affixes respectifs $z_A = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$ et $z_B = 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Déterminer le module et l'argument de z_A et de z_B.

2. Tracer la figure dans le repère ci-dessous.
On placera approximativement A et B en arrondissant $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{3}$ au dixième.

3. Calculer l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$ et en déduire la nature du triangle OAB.



Exercice 10.12

1. Tracer un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

2. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_M qui vérifient la propriété indiquée.
Tracer tous ces ensembles de points dans ce même repère.

a) $|z_M| = 3$ **b)** $|z_M| \leqslant 2$ **c)** $\arg(z_M) = \dfrac{\pi}{4}$ **d)** $\arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{4}$ et $|z_M| \leqslant 5$.

Exercice 10.13

1. Tracer un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
et placer les points A et B d'affixes $z_A = 6 + \mathrm{i}$ et $z_B = 2 + 5\mathrm{i}$.

2. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z_M qui vérifient la propriété indiquée.

a) $|z_M - z_A| \leqslant 2$
b) $|z_M - z_A| = 3$ (construction au compas)
c) $|z_M - z_A| = |z_M - z_B|$

Exercice 10.14

1. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 4 - 2\mathrm{i}| = 3$?
2. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 10| \leqslant 2$?
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z - 4 - 2\mathrm{i}| = |z - 10|$?
4. Tracer ces ensembles dans un repère orthonormé du plan.

Indication pour les questions **1. 2. 3.** : on appelle A et B les points d'affixes respectifs $4 + 2\mathrm{i}$ et 10.

10.3 Propriétés des modules et arguments

Exercice 10.15
Le but de cet exercice est de démontrer que pour deux complexes z et z' on a les égalités :
$|z \times z'| = |z| \times |z'|$ *et* $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
Deux complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :
$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta))$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$

1. Démontrer par un calcul que : $z \times z' = |z||z'|\big(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')\big)$
2. En déduire les deux égalités à démontrer.

Exercice 10.16
z_1 et z_2 sont les nombres complexes : $z_1 = 3 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\right)$ et $z_2 = 5 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$.

Exercice 10.17
Démontrer que pour tout complexe z, et pour tout entier naturel n on a les égalités :
$|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$.
Indications
- Écrire d'abord z sous forme trigonométrique : $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$.
- Démontrer ces égalités par récurrence.
- On suppose connues les égalités : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$

Exercice 10.18
Le nombre complexe z est donné par : $z = 7 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\right)$
Déterminer le module et un argument de z^4

Exercice 10.19
Démontrer que pour tout complexe z, et pour tout complexe z' non nul on a les égalités :
$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
Indications

- On pose $Z = \dfrac{z}{z'}$ et ainsi on a : $z = Zz'$
- On suppose connues les égalités : $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Exercice 10.20

z_1 et z_2 sont les nombres complexes : $z_1 = 15 \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $z_2 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Exercice 10.21

Le nombre complexe $(1+\mathrm{i})^{700}$ est-il un nombre réel ? Justifier.

COURS : *les propriétés des modules et argument sont récapitulées dans la section 10.2.*

10.4 Propriétés des modules et arguments et géométrie

Exercice 10.22

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C sont les points d'affixes respectifs $z_A = 2 + \mathrm{i}$ $\quad z_B = 6 + 2\mathrm{i}$ $\quad z_C = 5 + 6\mathrm{i}$.

1. À quoi sont associés les affixes $z_C - z_A$ et $z_B - z_A$?
2. Que représentent les arguments des affixes $z_C - z_A$ et $z_B - z_A$?
3. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
4. Déterminer un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
5. Que représente cet argument ?

COURS : *paragraphe 10.7.*

Exercice 10.23

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C, D sont les points d'affixes respectifs $z_A = -1 + 2\mathrm{i}$ $\quad z_B = 1 + 4\mathrm{i}$ $\quad z_C = 3 - 2\mathrm{i}$ $\quad z_D = -1$.

1. Tracer la figure.
2. Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
3. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
4. Démontrer que les points A, B, C, D sont sur un même cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

10.5 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 10.24

Pour tout réel θ, on pose $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

Démontrer que : $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$

COURS : *avant de faire les exercices suivants, lire la section 10.3.*

Exercice 10.25

1. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes ci-dessous.

   a) $z_1 = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$ **b)** $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ **c)** $z_3 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes ci-dessous.

   a) $z_1 = 1 + i$ **b)** $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ **c)** $z_3 = 3$ **d)** $z_4 = -4$ **e)** $z_5 = 2i$ **f)** $z_6 = -3i$

Exercice 10.26

1. Justifier pourquoi le nombre complexe $z = -7e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas sous la forme exponentielle.
2. Écrire z sous la forme exponentielle. Indication : écrire d'abord -7 sous la forme exponentielle.

Exercice 10.27

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes ci-dessous.

1. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 5e^{i\frac{\pi}{4}}$ **2.** $z_2 = \dfrac{8e^{i\pi}}{4e^{i\frac{\pi}{3}}}$ **3.** $z_3 = (7e^{i\frac{\pi}{6}})^2$ **4.** $z_4 = \dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$ **5.** $z_5 = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

Exercice 10.28

On donne $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $z + \dfrac{1}{z}$.

Exercice 10.29

On donne $z = 3\sqrt{3} + 3i$.

1. Écrire z sous forme exponentielle.
2. En déduire une forme exponentielle de chacun des complexes suivants : $-z$; z^2 ; $\dfrac{1}{z}$; $\overline{z}$.

Exercice 10.30

On donne $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. Écrire la forme algébrique de $z_1 z_2$.
3. Écrire une forme exponentielle de $z_1 z_2$.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{5\pi}{12}$ et de $\sin \dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 10.31

Retrouver les formules donnant $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ en utilisant le fait que $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$

Exercice 10.32

Calculer : $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Les égalités obtenues sont appelées *formules d'Euler*.

Exercice 10.33

On donne $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

10.6 Problème

Exercice 10.34

On donne : $z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$.

On appelle A_n le point d'affixe z_n.

1. **a)** Calculer z_1, z_2, z_3.
   b) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 dans un repère orthonormé.
   c) Quelle est la nature du triangle OA_1A_2 ? Le démontrer.
2. La suite (r_n) est définie par : $r_n = |z_n|$
   a) Justifier que la suite (r_n) est géométrique. On donnera son premier terme et sa raison.
   b) Écrire r_n en fonction de n.
   c) Quelle est la limite de la suite (r_n) ? Justifier.
   d) Que peut-on en déduire pour la suite des points A_n ?
3. Étant donné un réel positif d, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $r_n < d$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	r est un réel
		d est un réel
		n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à r la valeur 8
Entrée	:	Demander la valeur de d
Traitement	:	
Sortie	:	

Exercice 10.35

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 - 2z + 4$.

1. **a)** Démontrer qu'il existe deux points A et B qui sont associés à l'origine O du repère.
   On appelle z_A et z_B les affixes respectifs des points A et B.
   b) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.
   c) Quelle est la nature du triangle OAB ? Le démontrer.
   d) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
3. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$.

10.7 Pour réviser

Chapitre 9 – Nombres complexes

Ce chapitre du livre contient tout ce qui concerne les nombres complexes.

Ce qui est indiqué ci-dessous concerne seulement les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes.

Pour ce qui concerne la forme algébrique, l'équation du second degré, l'affixe d'un point ou d'un vecteur, le conjugué, voir les fiches du chapitre 5.

Les exercices résolus

- ex 32 p 245 : passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique
- ex 33 p 245 : passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique
- ex 38 p 247 : utiliser la forme trigonométrique et la forme algébrique d'un complexe pour calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
- ex 39 p 247 : puissance d'un nombre complexe
- ex 44 p 249 : forme algébrique et forme exponentielle
- ex 45 p 249 : retrouver des formules de trigonométrie

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés page 467

- ex 35 p 245 : mettre un complexe sous forme trigonométrique
- ex 37 p 245 : mettre un complexe sous forme algébrique
- ex 40 p 247 : mettre un complexe sous forme trigonométrique
- ex 42 p 247 : mettre un complexe sous forme algébrique
- ex 46 p 249 : mettre une forme exponentielle sous forme algébrique
- ex 51 p 249 : retrouver des formules de trigonométrie

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 476

- ex 160 p 257, questions 2 à 5
- ex 161 p 257, questions 2 et 3
- ex 162 à 165 p 257

II Cours

Rappel

Les nombres complexes ont été introduits au chapitre 5, et les notions suivantes ont été traitées :

- forme algébrique ;
- opérations ;
- équations du second degré ;
- représentation géométrique ;
- conjugué.

10.1 Module, arguments, forme trigonométrique

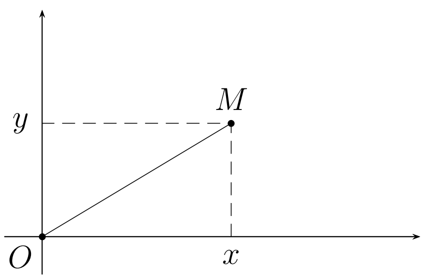
Définition 10.1 (Module d'un nombre complexe)

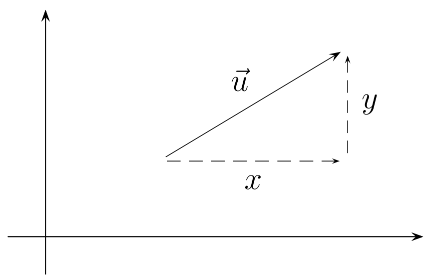
Le module d'un nombre complexe $z = x + y\mathrm{i}$ s'écrit $|z|$ et il est défini par : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque : pour un nombre réel, son module est sa valeur absolue.

Propriété 10.1 (Interprétation géométrique du module)

- Pour un point M d'affixe z_M dans un repère orthonormé du plan d'origine O, le module de z_M est égal à la distance OM : $|z_M| = OM$
- Pour un vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ dans un repère orthonormé du plan, le module de $z_{\vec{u}}$ est égal à la norme du vecteur $\vec{u}$: $|z_{\vec{u}}| = ||\vec{u}||$





Propriété 10.2

Pour deux complexes z et z', on a $z\overline{z} = |z|^2$

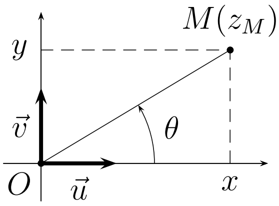
Démonstration

$$z\overline{z} = (x + y\mathrm{i}) \times (x - y\mathrm{i}) = x^2 - (y\,\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2\,\mathrm{i}^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2$$

Définition 10.2 (Argument d'un nombre complexe)

Pour un point M d'affixe z dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ du plan, on appelle argument de z, et on note $\arg(z)$, une mesure de l'angle de vecteur $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.

Exemple : sur la figure ci-dessous $\arg(z_M) = \theta = (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.



Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$ du plan, considérons un point M d'affixe $z = x + y\text{i}$.

Si θ est un argument de z, alors $x = |z| \times \cos\theta$ et $y = |z| \times \sin\theta$.

Ainsi : $z = x + y\text{i} = |z| \times \cos\theta + |z| \times \sin\theta \times \text{i} = |z| \times (\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$.

Définition 10.3

z est un nombre complexe non nul et θ est un argument de z.
On appelle **forme trigonométrique de** $\boldsymbol{z}$ l'écriture $|z|(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$.

Méthode pour calculer la forme trigonométrique d'un complexe $z = x + y\text{i}$

- On calcule $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- On écrit z sous la forme : $|z| \times \dfrac{x + y\text{i}}{|z|} = |z| \times \left(\dfrac{x}{|z|} + \dfrac{y}{|z|}\text{i}\right)$.
- On détermine θ tel que : $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|}$.

  Pour cela, on utilise un cercle trigonométrique et les valeurs remarquables du tableau du paragraphe 7.1.f du chapitre 7 (Fonctions trigonométriques).
- On peut alors écrire z sous la forme trigonométrique : $z = |z|(\cos\theta + \text{i}\sin\theta)$.

Exemple

Écrivons sous la forme trigonométrique le nombre complexe $z = \sqrt{3} - \text{i}$.

$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

$z = \sqrt{3} - \text{i} = 2 \times \dfrac{\sqrt{3} - \text{i}}{2} = 2 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}\right)$

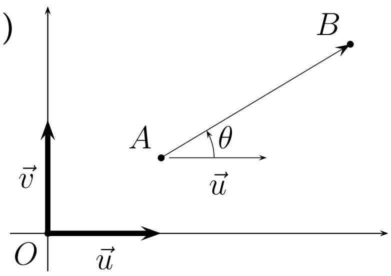
À l'aide du cercle trigonométrique et des valeurs remarquables de sinus et cosinus, on obtient : $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion : $z = \sqrt{3} - \text{i} = \boxed{2 \times \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)}$.

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, pour des points A et B d'affixes respectifs z_A et z_B, on rappelle que $\boxed{\text{l'affixe d'un vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ est } z_B - z_A :\ z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$.

Définition 10.4 (Module et argument de l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
Pour des points A et B d'affixes respectifs z_A et z_B on a :
$AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$



10.2 Propriétés des modules et arguments

Propriété 10.3 (Nombres complexes égaux)

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux, et si leurs arguments sont égaux à un multiple de 2π près.
Autrement dit : $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2|$ et $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Propriété 10.4 (Opposé et conjugué)

Pour tout nombre complexe z,
- $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi + 2k\pi$
- $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg z + 2k\pi$

Propriété 10.5 (Réel et imaginaire)

Pour tout nombre complexe z non nul,
- z est un nombre réel si et seulement si $\arg(z) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 10.6 (Produit, puissance et quotient)

Pour tous nombres complexes z et z',
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration de la première égalité

Pour deux complexes z et z', appelons respectivement θ et θ' les arguments de z et z', et ainsi : $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta))$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$

Calculons $z \times z'$:

$$\begin{aligned} z \times z' &= |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \times |z'|(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \\ &= |z| \times |z'| \times (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ &= |z||z'|\big(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')\big) \end{aligned}$$

On a donc : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$

Propriété 10.7 (Conséquence géométrique)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.
Pour des points A, B, C, D, d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C, z_D, dans on a :
$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

10.3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Posons $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et calculons $f(\theta) \times f(\theta')$:

$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \times (\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$

or nous avons démontré dans le paragraphe 10.6 que :

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \times (\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')$

Donc : $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$

On obtient donc une propriété analogue à celle de la fonction exponentielle.

C'est cela qui a donné aux mathématiciens comme Euler en 1748 l'idée de définir : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et puisque la forme trigonométrique d'un complexe z s'écrit $|z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, on a ainsi : $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

On donne donc les définitions ci-dessous.

Définition 10.5

Pour nombre réel θ : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

Définition 10.6

Pour nombre complexe z, d'argument θ, une **notation exponentielle de** z est l'écriture $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Propriété 10.8

Pour tous réels θ et θ' et tout entier naturel n,

- $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$ et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \theta + 2k\pi$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
- $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (formule de Moivre)
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$
- $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \theta = \theta' + 2k\pi$