Chapitre 11

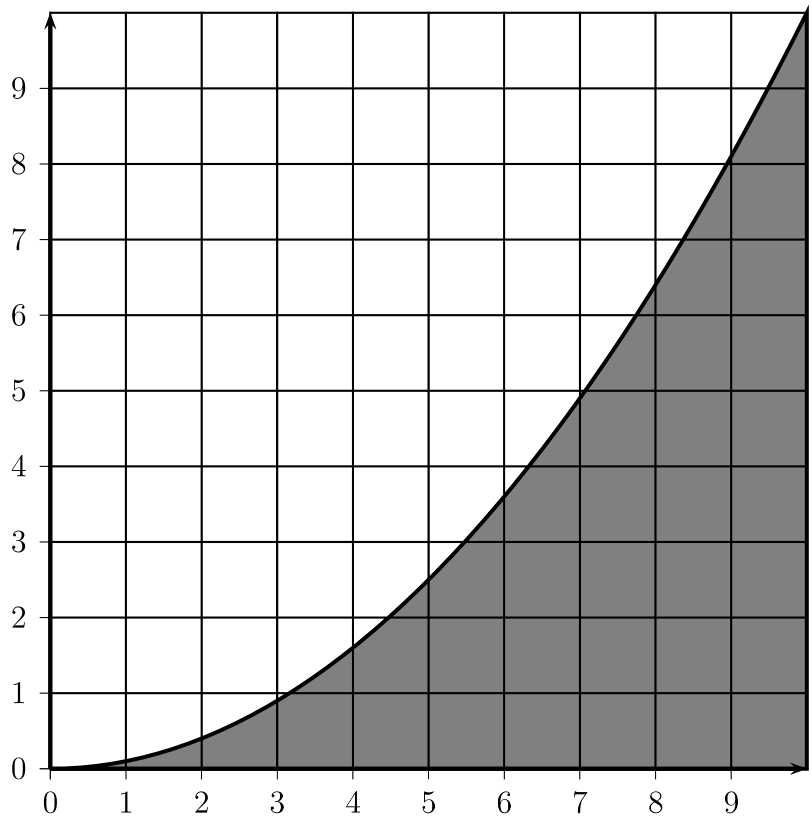
Intégrales et primitives

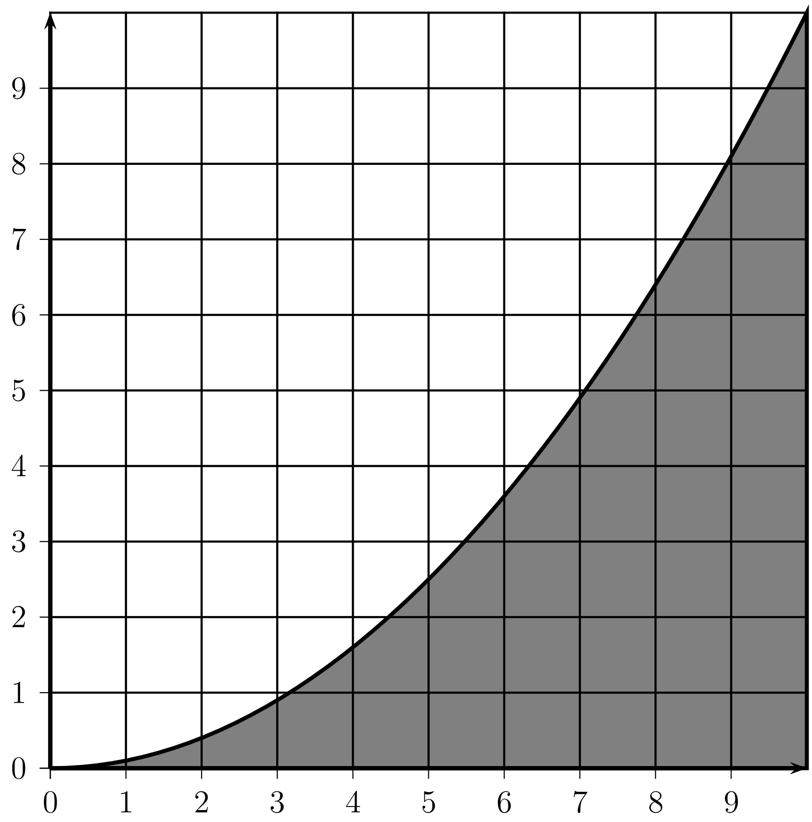
I Exercices

11.1 Intégrale de fonction positive

Exercice 11.1

Évaluer approximativement l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous, l'axe des abscisses, et la droite d'équation $x = 10$.





COURS : *lire la définition d'une intégrale au paragraphe 11.1.*

Exercice 11.2 (Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles)

La fonction représentée dans l'exercice sur fiche n° 11.1 était la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{10}$.

Elle est à nouveau représentée ci-dessous.

Voici un algorithme.

Entrée : n

Stocker 0 dans s

Pour des valeurs de k allant de 0 à $n-1$, de 1 en 1

    Stocker $k \times \dfrac{10}{n}$ dans x

    Stocker $\dfrac{x^2}{10}$ dans y

    Stocker $y \times \dfrac{10}{n}$ dans r

    s prend la valeur $s + r$

    Fin de la boucle "pour"

Sortie (résultat) : s

1. Exécuter cet algorithme lorsque $n = 5$, en complétant ci-dessous.
Entrée : $n = 5$

k						
x						
y						
r						
s	0					

Sortie : $s = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Que représentent les valeurs successives de r ?

3. Que représente le résultat de cet algorithme (c'est à dire la valeur finale de s) ?

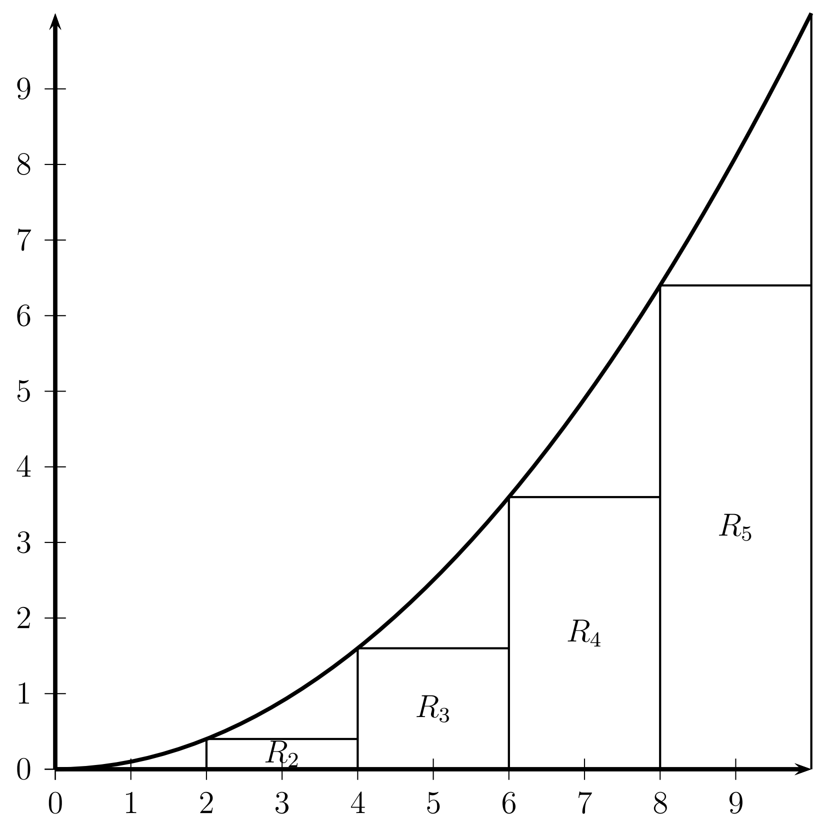
4. a) Programmer cet algorithme à la calculatrice ou en Python.

b) Vérifier en exécutant ce programme avec $n = 5$.

c) Exécuter ce programme
- à la calculatrice, avec $n = 20$, puis $n = 100$, puis $n = 1000$ (le temps de calcul est de quelques secondes de calcul pour $n = 100$ et d'environ 45 secondes pour $n = 1000$) ;
- en Python avec $n = 20$, puis $n = 100$, $n = 1\,000$, $n = 10\,000$, $n = 100\,000$.

d) Compléter

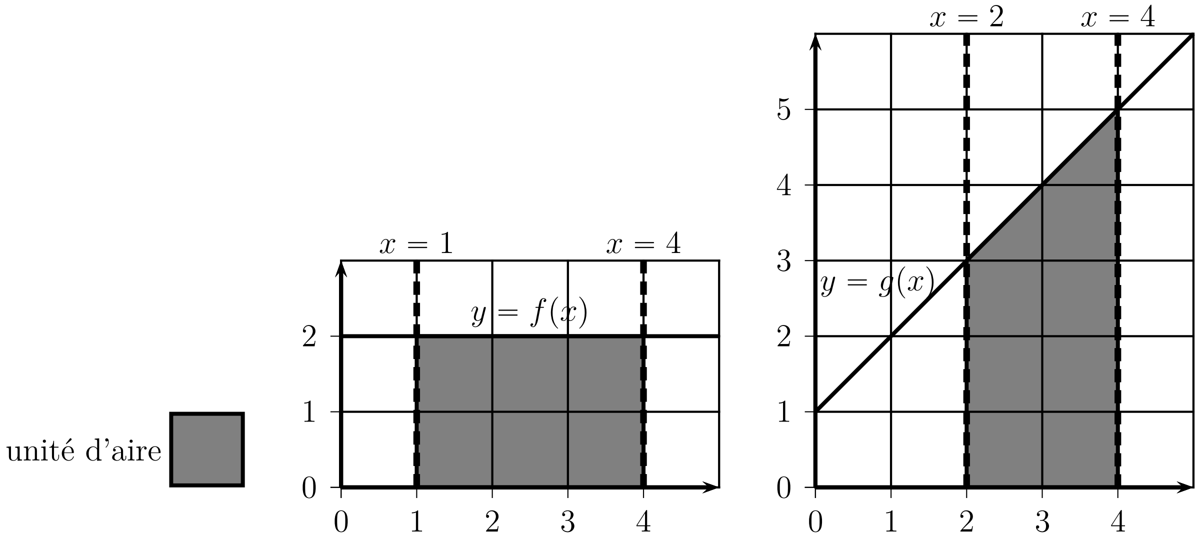
n	5					
Valeur finale de s						



Exercice 11.3 (Intégrale d'une fonction affine (1))

Les fonctions définies par $f(x) = 2$ et $g(x) = x + 1$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ sont représentées graphiquement ci-dessous.

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$, c'est à dire l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 g(x)\,dx$, c'est à dire l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 4$.

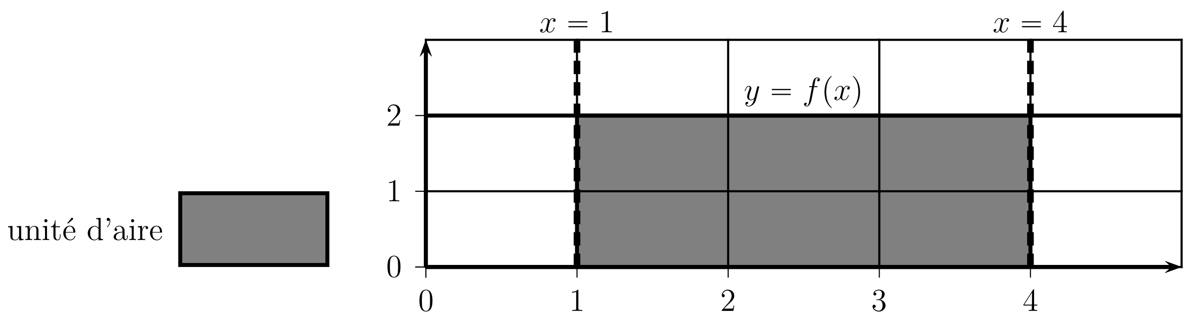


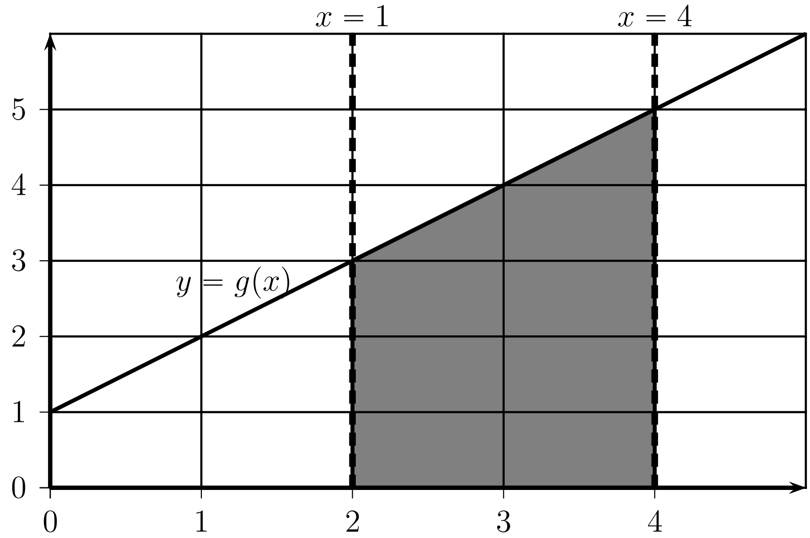
COURS : *lire le paragraphe 11.2*

Exercice 11.4 (Intégrale d'une fonction affine (2))

Les fonctions f et g de l'exercice précédent sont à nouveau représentées graphiquement ci-dessous et page suivante, chacune dans un repère orthogonal, d'unité 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée. Dans ce cas l'unité d'aire est l'aire du « rectangle unité », c'est à dire 2 cm².

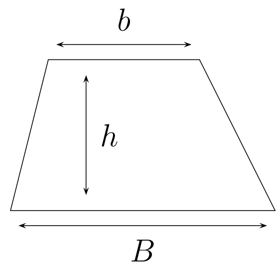
1. a) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ en unité d'aire puis en cm².
   b) Quel résultat est égal à l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$?
2. a) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 4$ en unité d'aire puis en cm².
   b) Quel résultat est égal à l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 g(x)\,dx$?





Exercice 11.5 (Intégrale d'une fonction affine (3))

Calculer les intégrales ci-dessous. Comme ce sont des intégrales de fonctions affines, les aires à calculer sont des aires de trapèzes.
Rappelons donc la formule de calcul de l'aire d'un trapèze :
aire d'un trapèze $= \dfrac{(b+B)\times h}{2}$

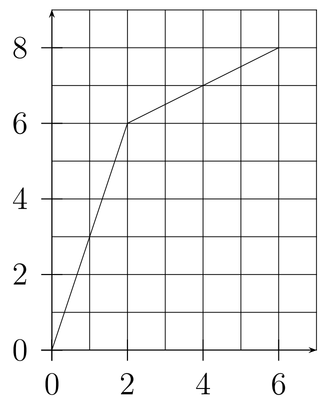


(1) $\displaystyle\int_4^{12} (0,25x+3)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{0,5}^{3} (2x+1)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^{5} (-x+7)\,dx$ (4) $\displaystyle\int_2^{6} (-0,5x+4)\,dx$

Exercice 11.6

La fonction f est définie par $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0,5x+5 & \text{si } 2 < x \leqslant 6 \end{cases}$

Elle est représentée graphiquement ci-contre.
On appelle cela une *fonction affine par morceaux*.

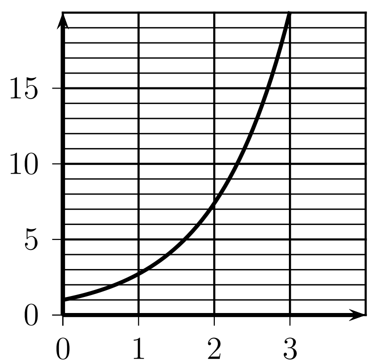


1. En hachurant ou en coloriant, mettre en évidence l'intégrale $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$ sur la figure ci-contre.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$.

Exercice 11.7

La fonction exponentielle est représentée ci-contre sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.



1. Mettre en évidence sur le graphique ci-contre l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^x\,dx$

2. Déterminer graphiquement un encadrement de cette intégrale.

Exercice 11.8

1. Sur la figure 1 ci-dessous, construire une courbe pouvant représenter une fonction f définie et continue sur [-2 ; 3] et vérifiant $3 \leqslant \int_{-1}^{2} f(x)dx \leqslant 9$
2. Sur la figure 2 ci-dessous, construire une courbe pouvant représenter une fonction g définie et continue sur [-1 ; 4] et vérifiant $4 \leqslant \int_{1}^{3} g(x)dx \leqslant 6$

Fig. 1

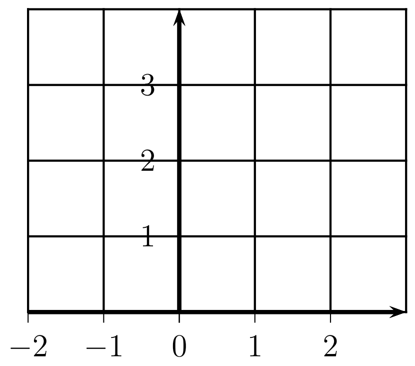
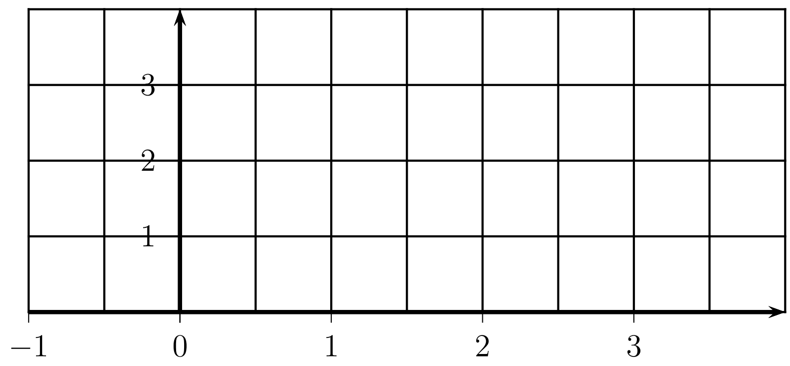


Fig. 2



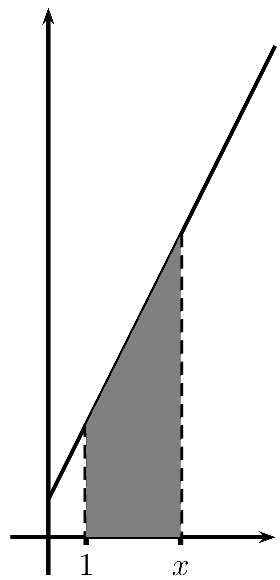
11.2 Théorème fondamental pour une fonction continue, positive

Exercice 11.9

La fonction f est définie par $f(t) = 2t + 1$ et elle est représentée ci-contre.

La fonction F est définie par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$

1. À l'aide d'un calcul d'aire, calculer l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
2. Calculer $F'(x)$
3. Que constate-t-on ?



COURS : *lire le paragraphe 11.3 qui généralise cette propriété.*

11.3 Primitive d'une fonction

Exercice 11.10

Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I. Dire que F est une primitive de f sur I signifie que f est la dérivée de F sur I, c'est à dire $\mathrm{F}' = f$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$

1. Déterminer une primitive F de f.

2. Déterminer deux autres primitives F_2 et F_3 de f.

3. La fonction f a en fait une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$. Quelle est la formule générale pour les primitives de f ?

Exercice 11.11

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, déterminer 3 primitives.

(1) $f(x) = 4x^3$ (2) $f(x) = x^5$ (3) $f(x) = \mathrm{e}^x$

COURS : *lire le paragraphe 11.4.a*

Exercice 11.12

Le tableau ci-contre rappelle les dérivées des fonctions usuelles.
Pour chacune des fonctions f suivantes, utiliser ce tableau pour déterminer une primitive F de f.

1. $f(x) = 1$ $\quad$ $F(x) =$ ....

2. $f(x) = x^2$ $\quad$ $F(x) =$ ....

3. $f(x) = x^5$ $\quad$ $F(x) =$ ....

4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $F(x) =$ ....

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ $F(x) =$ ....

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $F(x) =$ ....

7. $f(x) = e^x$ $\quad$ $F(x) =$ ....

8. $f(x) = \cos(x)$ $\quad$ $F(x) =$ ....

9. $f(x) = \sin(x)$ $\quad$ $F(x) =$ ....

Tableau de DÉRIVÉES	
$f(x)$	$f'(x)$
k constante	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

Exercice 11.13

On rappelle que pour une fonction u dérivable sur un intervalle I, on sait que :

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ et que $(e^u)' = u'e^u$

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive F de f.

1) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ $\quad$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ $\quad$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$

4) $f(x) = e^{4x-6}$ $\quad$ 5) $f(x) = e^{0,2x}$ $\quad$ 6) $f(x) = e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$

COURS : *lire le paragraphe 11.4.b*

Exercice 11.14

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, déterminer une primitive F de f.

1) $f(x) = 5x + 4$ 2) $f(x) = x^2 + x^3$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 4) $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$

5) $f(x) = -\dfrac{3}{x+1}$ 6) $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x+1}$ 7) $f(x) = \dfrac{2}{2x+1}$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$

9) $f(x) = x + 9\,\mathrm{e}^{-0,3x}$ 10) $f(x) = 128\,\mathrm{e}^{0,004x}$

Exercice 11.15

Vérifier que F est une primitive de f : $f(x) = 3xe^{-x}$ $\mathrm{F}(x) = (-3 - 3x)e^{-x}$

Exercice 11.16

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive F de f.

1) $f(x) = 3(3x+1)^4$ 2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 3) $f(x) = \dfrac{5}{(5x-6)^2}$ 4) $f(x) = \dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+7}}$

5) $f(x) = 9\mathrm{e}^{9x-4}$ 6) $f(x) = (4x+1)^5$ 7) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^2}$

9) $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ Indication : $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$. 10)$f(x) = \dfrac{3 + \ln x}{x}$

Exercice 11.17

Déterminer une primitive F de la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 11.18

Déterminer une primitive F de la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 11.19 (Primitives avec conditions initiales)

Déterminer chaque fois la primitive F de la fonction f qui respecte la condition indiquée.

1. $f(x) = 4x^2 - 1$ $F(0) = 2$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $F(0) = 0$
3. $f(x) = 10(x-1)^4$ $F(0) = 1$

11.4 Calculs d'intégrales de fonctions continues positives

COURS : *lire les paragraphes 11.5.a et 11.5.b*

Exercice 11.20

Calculer les intégrales ci-dessous.

(1) $\displaystyle\int_3^5 4t^3\,dt$ (2) $\displaystyle\int_3^5 t^5\,dt$ (3) $\displaystyle\int_3^5 \mathrm{e}^t\,dt$

Exercice 11.21

La fonction définie par $f(x) = 0,3x^2 + 1$ est représentée page suivante. L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

1. En s'aidant du quadrillage, donner un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ par deux nombres entiers.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en calculant une intégrale.
3. Vérifier que le résultat précédent est bien compris entre les deux entiers de la première question.

Ci-dessous, fig. 1 pour l'exercice 11.21 et fig. 2, 3, 4 pour l'exercice 11.22

Fig. 1

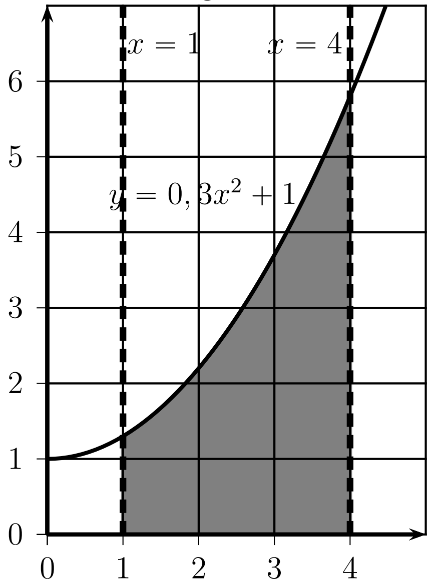


Fig.2

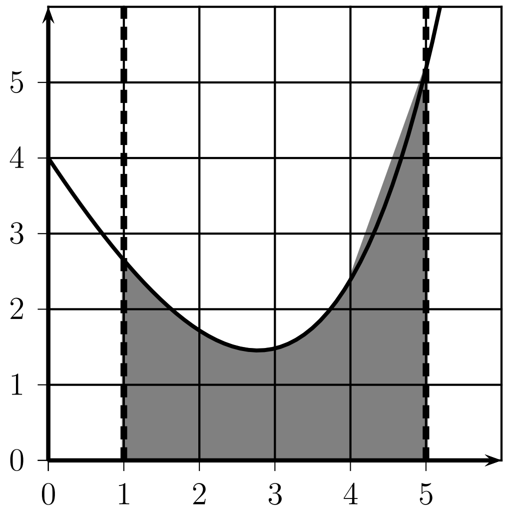


Fig. 3

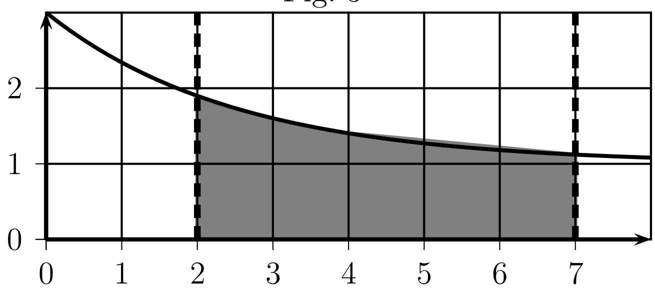
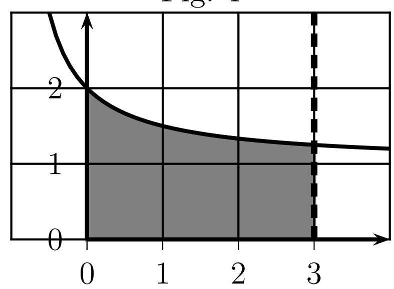


Fig. 4



Exercice 11.22

Même exercice que l'exercice 11.21 avec chacune des fonctions et des aires indiquées.

1. La fonction définie par $f(x) = -2x + 3 + e^{0,5x}$ est représentée sur la figure 2. L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 5$.
2. La fonction définie par $f(x) = 1 + 2e^{-0,4x}$ est représentée sur la figure 3. L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 7$.
3. La fonction définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ est représentée sur la figure 4. L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 3$.

Exercice 11.23

La fonction définie par $f(x) = 4 - 0,25x^2$ est représentée ci-dessous (fig. 1, plus bas) dans un repère orthogonal d'unité 2 cm pour l'axe des abscisses et d'unité 1 cm pour l'axe des ordonnées.

L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 2$.

1. En s'aidant du quadrillage, donner un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ par deux nombres entiers, d'abord en unités d'aire, puis en cm^2.

2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en calculant une intégrale.

3. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2.

4. Vérifier avec les encadrements trouvés à la première question.

Exercice 11.24

Même exercice que l'exercice 11.23 avec la fonction f et l'aire indiquée ci-dessous.

La fonction définie par $f(x) = 0,2x + e^{-x}$ est représentée ci-dessous (fig. 2) dans un repère orthogonal d'unité 1 cm pour l'axe des abscisses et d'unité 2 cm pour l'axe des ordonnées.

L'aire $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$.

Fig. 1

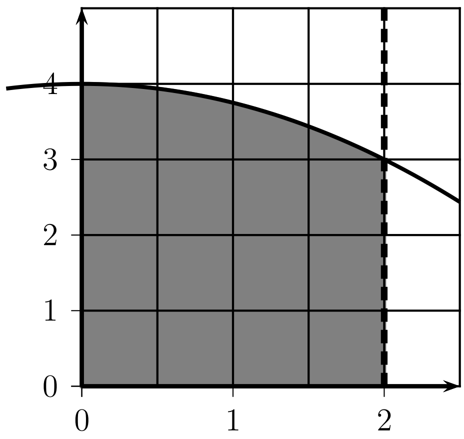
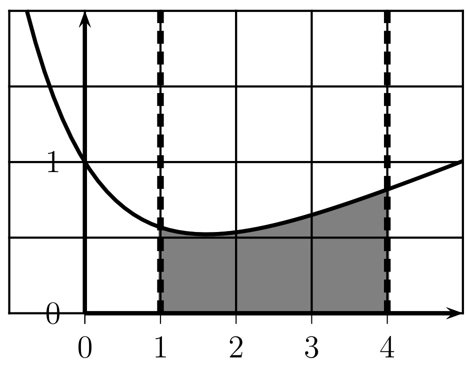


Fig. 2



Exercice 11.25

La fonction f définie par $f(x) = \ln x$ est représentée graphiquement page suivante sur l'intervalle $[0,4\,;\,5]$ (figure 1).

1. Justifier que la fonction définie par $\mathrm{F}(x) = x\ln x - x$ est une primitive de f sur l'intervalle $[0,4\,;\,5]$.

2. Mettre en évidence sur le graphique ci-dessous, l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 \ln x\,dx$.

3. Justifier par un calcul que cette intégrale est égale à $6\ln 2 - 2$.

4. Arrondir le résultat précédent au dixième près et préciser ce que signifie le résultat.

Exercice 11.26

La fonction g définie par $g(x) = -4x + 11 - \dfrac{4}{x}$ est représentée graphiquement page suivante sur l'intervalle $[0\,;\,2,5]$ (figure 2).

1. Mettre en évidence sur le graphique page suivante l'intégrale suivante $\displaystyle\int_{0,5}^{2} g(x)\,dx$.

2. Justifier par un calcul que cette intégrale est égale à $9 - 8\ln 2$.

3. Arrondir le résultat précédent au dixième près et préciser ce que signifie le résultat.

Fig. 1

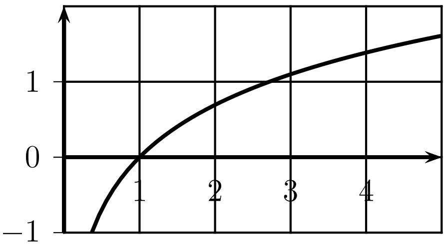
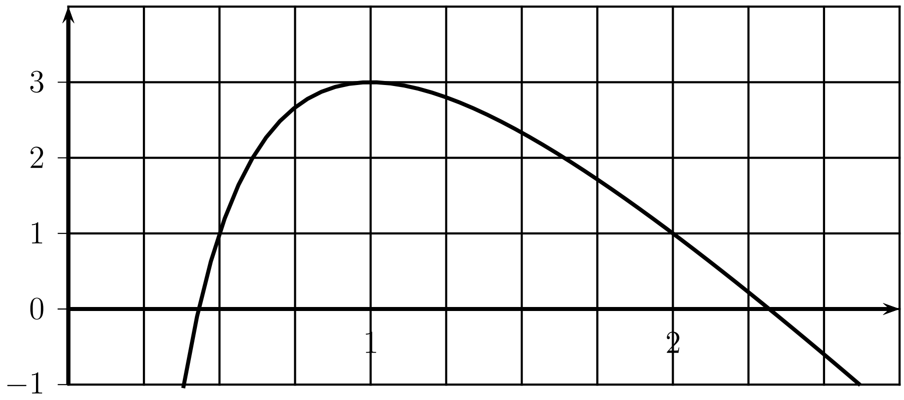


Fig. 2

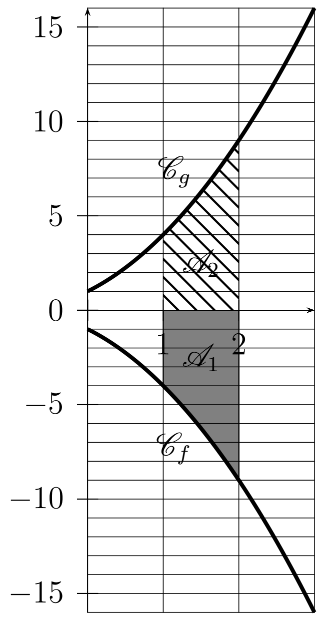


11.5 Calculs d'intégrales de fonctions continues de signe quelconque

Exercice 11.27 (Intégrale d'une fonction continue négative)

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ et elle est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$.

On appelle $\mathscr{A}_1$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$,



1. **a)** Sans justifier, quel est le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$?

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

2. La fonction g est la fonction $-f$ et elle est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_g$.

On appelle $\mathscr{A}_2$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

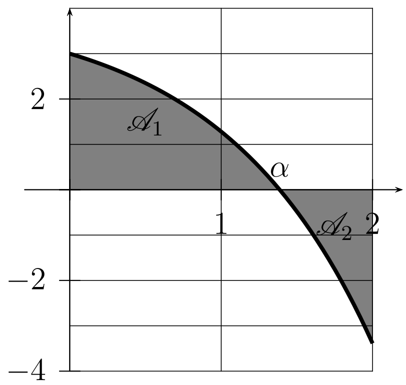
a) Que peut-on dire des aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$? Justifier sans calcul.

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$.

3. Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ par rapport à l'aire $\mathscr{A}_1$?

Exercice 11.28 (Intégrale d'une fonction continue de signe non constant)

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ 2]$ par $f(x) = 4 - \mathrm{e}^x$ et elle est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$.



1. Déterminer la valeur exacte du nombre α entre 0 et 2 tel que $f(\alpha) = 0$.
2. On appelle
   - $\mathscr{A}_1$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$,
   - $\mathscr{A}_2$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 2$.

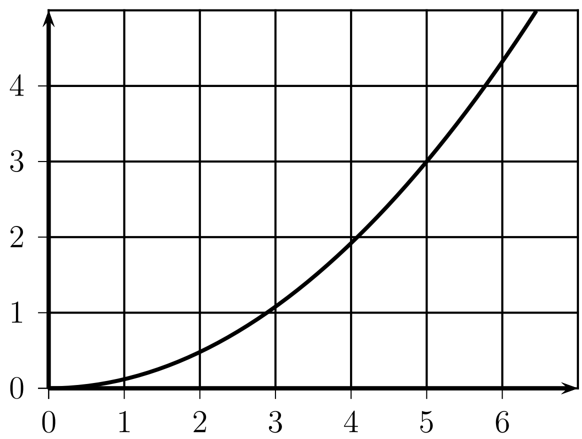
   Calculer $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.

11.6 Valeur moyenne d'une fonction

Exercice 11.29

La fonction définie par $f(x) = 0,12x^2$ est représentée graphiquement ci-contre.

1. Mettre en évidence sur cette figure l'intégrale $\displaystyle\int_2^6 0,12x^2\,dx$ et la calculer.
2. Placer les points A $(2\,;\,0)$ et B $(6\,;\,0)$.
3. On veut tracer le rectangle ABCD dont l'aire soit égale à l'intégrale précédente.
   a) Quelle est sa longueur (sans justifier) ?
   b) Calculer sa largeur. Arrondir au dixième près. On appelle ce nombre **la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[2\,;\,6]$**
   c) Tracer le rectangle ABCD.



11.7 Propriétés de l'intégrale

Exercice 11.30 (Linéarité)

1. Calculer $\displaystyle\int_1^5 (2x + 3x^2)\,dx$ et $\displaystyle\int_1^5 2x\,dx + \int_1^5 3x^2\,dx$ et comparer les résultats.
2. Calculer $\displaystyle 5 \times \int_2^7 \frac{1}{x+2}\,dx$ et $\displaystyle\int_2^7 5 \times \frac{1}{x+2}\,dx$ et comparer les résultats.

Exercice 11.31

1. Sachant que $\displaystyle\int_0^3 4x^2e^{2x}\,dx = 13e^6 - 1$ et que $\displaystyle\int_0^3 xe^x\,dx = 2e^3 + 1$ calculer $\displaystyle\int_0^3 (4x^2e^{2x} + xe^x)\,dx$
2. Sachant que $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{\ln(1,5)}{2}$ calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{4}{x^2-1}\,dx$

Exercice 11.32 (Signe d'une intégrale)

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par : $f(x) = 2x - 10$

L'objectif de cet exercice est de faire le lien entre le signe d'une fonction et le signe d'une intégrale

- Tracer la représentation graphique de la fonction f ci-dessous.
- Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.
- Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_6^8 f(x)\,dx$.
- Si $a < b$, quel est apparemment le signe de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ selon le signe f sur $[a\ ;\ b]$.

Exercice 11.33

Une fonction f est définie sur l'intervalle $[2\ ;\ 15]$;
- positive sur l'intervalle $[2\ ;\ 9]$;
- négative sur l'intervalle $[9\ ;\ 15]$;

1. À propos du signe de l'intégrale $\displaystyle\int_9^{12} f(x)\,dx$ on peut dire que (une seule bonne réponse) :

(a) son signe est positif ; (b) son signe est négatif ; (c) on ne peut pas conclure.

2. Mêmes questions pour l'intégrale $\displaystyle\int_7^{13} f(x)\,dx$

3. Mêmes questions pour l'intégrale $\displaystyle\int_3^{7} f(x)\,dx$

Exercice 11.34

Sans calcul, déterminer le signe de chacune des intégrales suivantes.

(1) $\displaystyle\int_{0,5}^1 \ln(x)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_2^7 \ln(x)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-8}^2 \mathrm{e}^x\,dx$ (4) $\displaystyle\int_4^6 \mathrm{e}^{-x}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_1^5 x\ln(x)\,dx$

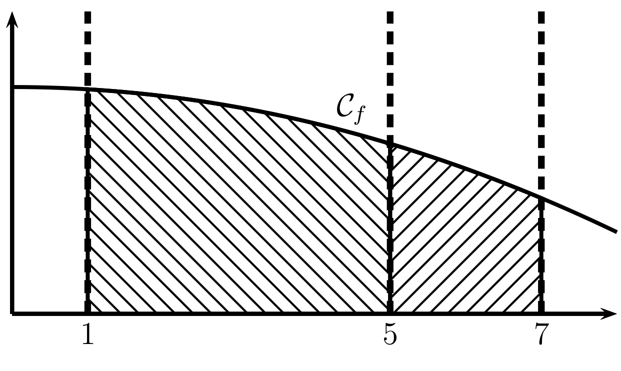
Exercice 11.35 (Relation de Chasles)

La fonction f est représentée ci-contre, ainsi que les intégrales $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_5^7 f(x)\,dx$.

On donne les valeurs suivantes :

$\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx = 10,76$ et $\displaystyle\int_5^7 f(x)\,dx = 3,82$.

Calculer $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,dx$



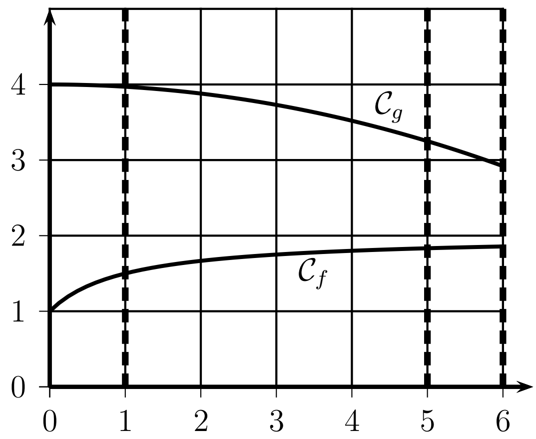
Exercice 11.36

Calculer les intégrales :

(1) $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^x\,dx + \int_3^7 \mathrm{e}^x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^4 (6x^2+8x)\,dx + \int_4^9 (6x^2+8x)\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx + \int_5^8 \frac{1}{x}\,dx$

Exercice 11.37 (Domaine délimité par les courbes de deux fonctions positives.)

Deux fonctions f et g sont représentées graphiquement ci-contre.



1. Les intégrales $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_1^5 g(x)\,dx$ sont-elles positives ? Justifier graphiquement.
2. Les fonctions f et g sont définies par : $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = 4 - 0,03x^2$
   Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 5$.

11.8 Exercices de type bac

Exercice 11.38

La suite (u_n) est définie par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n est positif.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n+1}$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n). Justifier.

Exercice 11.39

La suite (J_n) est définie par : $J_n = \displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$.

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n) par : $I_n = \displaystyle\int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,dt$.
   a) Justifier que pour tout réel $t \geqslant 1$, on a : $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.
   b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$
   c) Calculer I_n en fonction de n.
   d) En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel indépendant de n.
   e) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

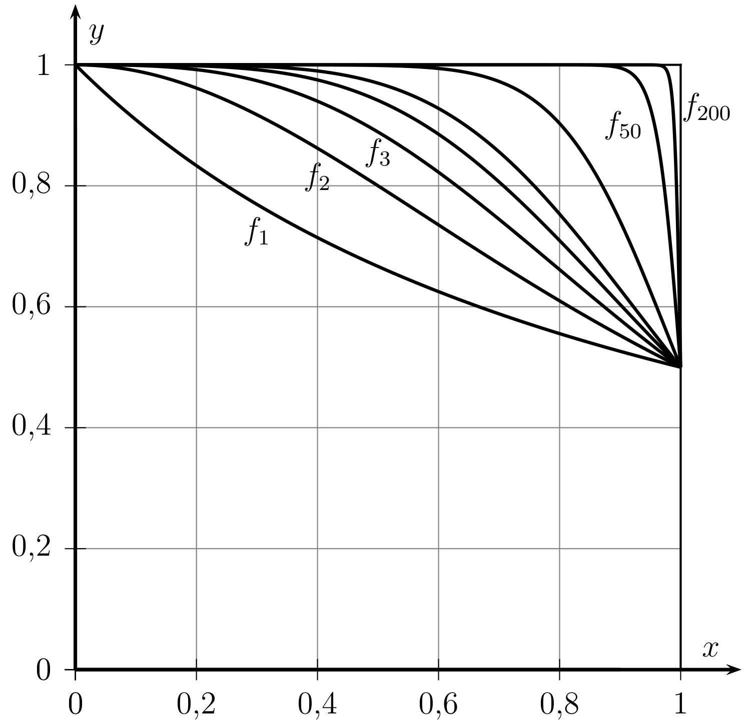
Exercice 11.40 (Bac S, Asie, juin 2014, ex 4)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. **a)** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^n)\ \mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$ Demander un entier $p \geqslant 1$ Pour k allant de 0 à $p - 1$ faire : x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

11.9 Pour réviser

Chapitre 8 – Calcul intégral

Les exercices résolus

- ex 1 p 201 : intégrale d'une fonction affine
- ex 9 p 203 : sens de variation d'une fonction définie à partir d'une intégrale
- ex 10 p 203 : vérifier une primitive
- ex 15 et 16 p 205 : calculs de primitives
- ex 20 p 207 : calculer une intégrale
- ex 21 p 207 : calculer une aire avec une intégrale
- ex 26 p 209 : utiliser la propriété de linéarité
- ex 27 p 209 : encadrer une intégrale

Rubrique *Pour s'exercer*, corrigés pages 466-467

- ex 2 p 201 : intégrales de fonctions affines
- ex 11 p 203 : fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$
- ex 13 p 203 : choisir une primitive parmi plusieurs fonctions possibles
- ex 17 p 205 : déterminer des primitives
- ex 22 p 207 : calculs d'intégrales
- ex 24 p 207 : calculer une aire avec une intégrale
- ex 28 p 209 : calcul d'une intégrale à l'aide d'une propriété
- ex 32 p 209 : encadrer une intégrale

Rubrique *Objectif bac*, corrigés page 475-476

- ex 100 p 215 : QCM
- ex 101 p 215 : Vrai/Faux
- ex 102 p 215 : Vrai/Faux
- ex 103 p 216 : exercice de type bac, étude d'une fonction, encadrement d'une intégrale
- ex 104 p 217 : exercice de type bac, partie A, question de cours, partie B, étude d'une suite
- ex 105 p 217 : intégrale et suite

II Cours

11.1 Méthode des rectangles

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ représentée graphiquement par une courbe $\mathscr{C}$ (figure en bas à droite).

La méthode des rectangles a pour but de calculer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre

- la courbe $\mathscr{C}$;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.

Pour un entier naturel n, on partage l'intervalle $[a\ ;\ b]$ en n petits intervalles de largeur $\dfrac{b-a}{n}$.

Ces n petits intervalles successifs sont donc

$$\left[a\ ;\ a + 1 \times \frac{b-a}{n}\right], \left[a + 1 \times \frac{b-a}{n}\ ;\ a + 2 \times \frac{b-a}{n}\right], \dots, \left[a + (n-1) \times \frac{b-a}{n}\ ;\ a + n \times \frac{b-a}{n}\right].$$

Pour continuer, il est plus commode de poser $x_k = a + k \times \dfrac{b-a}{n}$, ainsi nos intervalles s'écrivent $[x_0\ ;\ x_1]$, $[x_1\ ;\ x_2]$, $\dots$, $[x_{n-1}\ ;\ x_n]$

Pour chaque intervalle $[x_k\ ;\ x_{k+1}]$ on calcule l'aire du rectangle de largeur $\dfrac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(k+1)$, et on ajoute les aires de ces rectangles.

Écrivons la somme S_n des aires de ces n rectangles.

$$S_n = \frac{b-a}{n} \times f(x_1) + \frac{b-a}{n} \times f(x_2) + \cdots + \frac{b-a}{n} \times f(x_n)$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \times \big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big)$$

$$S_n = \frac{b-a}{n} \times \left(f\left(a + 1 \times \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2 \times \frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + n \times \frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Lorsque n devient très grand, on obtient une bonne valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$.

Le problème est que lorsque n devient très grand, les calculs sont trop longs et il faut utiliser un programme qui calcule cette somme pour une valeur donnée de n. On peut par exemple programmer l'algorithme ci-dessous.

Algorithme

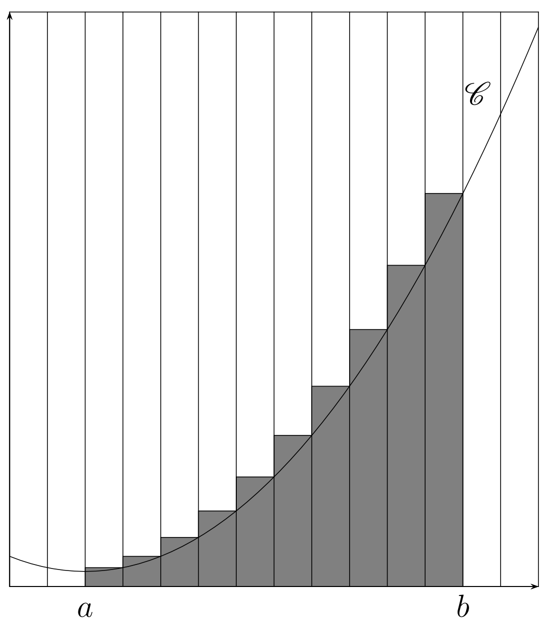
Entrées : a, b, n

$s \leftarrow 0$

Pour des valeurs de k allant de 1 à n, de 1 en 1

> $r \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \times f\left(a + k \times \dfrac{b-a}{n}\right)$
>
> s prend la valeur $s + r$
>
> Fin de la boucle "pour"

Sortie : s



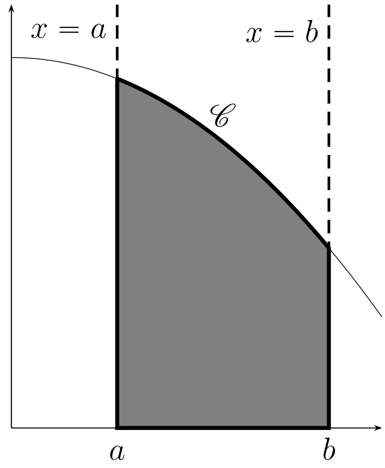
11.2 Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 11.1 (Aire sous une courbe)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ représentée graphiquement par une courbe $\mathscr{C}$.

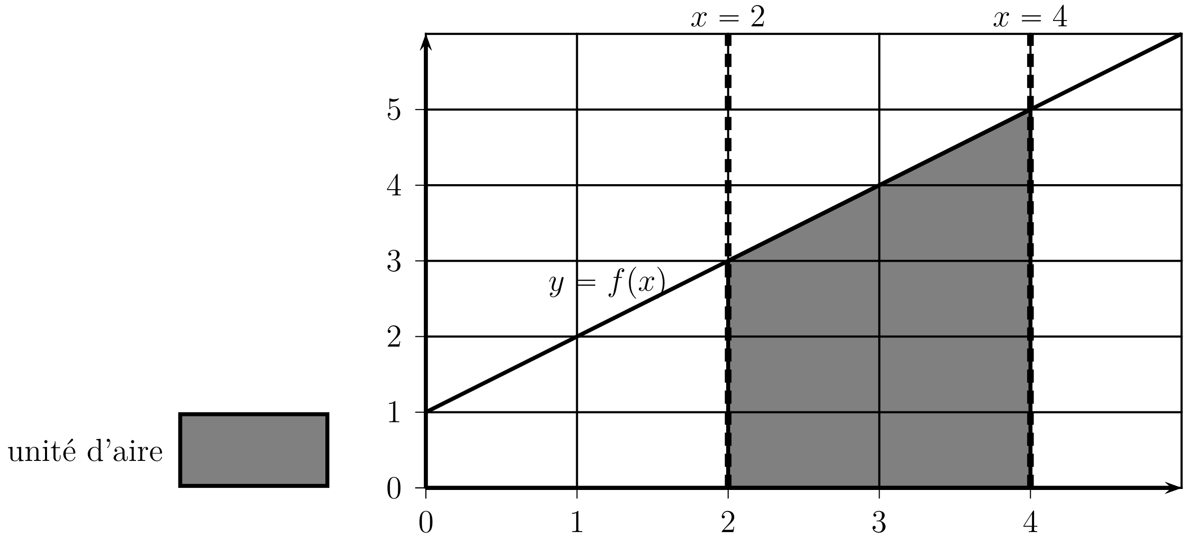
L'intégrale de la fonction f sur intervalle $[a\ ;\ b]$ qui s'écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, est l'aire, **exprimée en unités d'aire**,

de la partie du plan comprise entre
- la courbe $\mathscr{C}$;
- l'axe des abscisses ;
- les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.



Exemple : intégrale d'une fonction affine

La fonction f est définie par $f(x) = x + 1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. Elle est représentée graphiquement ci-dessous et l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 (x+1)$ est égale à l'aire grisée en unités d'aire soit $\boxed{\text{8 unités d'aire}}$.



11.3 Théorème fondamental pour une fonction continue, positive

Propriété 11.1

Si f est continue et positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a, b]$ et sa dérivée est f : $F' = f$.

Exemple : exercice sur fiche n° 11.9

$f(t) = 2t + 1$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \frac{(x-1)(f(1)+f(x))}{2} = \frac{(x-1)(2x+4)}{2} = x^2 + x - 2$$

$F'(x) = 2x + 1 = f(x)$

Démonstration lorsque F est une fonction continue, positive et croissante

Nous savons que si une fonction F est dérivable en x, la définition de $F'(x)$ est :

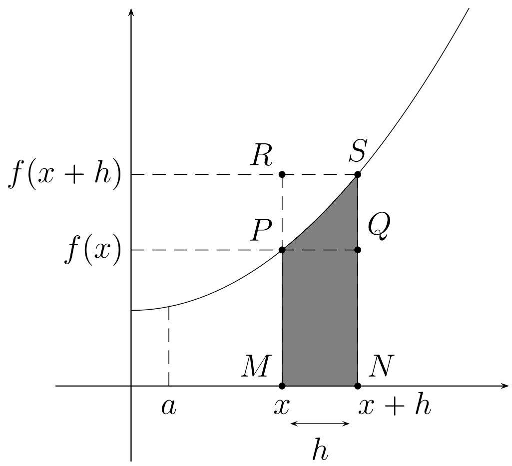
$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \right)$

$\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{1}{h} \times \left(\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right) = \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt$

➜ Étudions d'abord le cas où $h > 0$. Dans ce cas $x < x + h$.

On sait que la fonction f est croissante, donc sur l'intervalle $[x\ ;\ x+h]$, on a : $f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x+h)$.

L'intégrale $\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ c'est à dire l'aire grisée est comprise entre les aires de rectangles $MPQN$ et $MRSN$ sur la figure,
or : aire $(MNPQ) = h \times f(x)$,
et : aire $(MRSN) = h \times f(x+h)$.



On a donc l'encadrement :

$h \times f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant h \times f(x+h)$

Donc : $\dfrac{1}{h} \times h \times f(x) \leqslant \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant \dfrac{1}{h} \times h \times f(x+h)$

Soit finalement : $f(x) \leqslant \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(x+h)$

Autrement dit : $f(x) \leqslant \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$

Lorsque h tend vers 0, $f(x+h)$ tend vers $f(x)$ parce que f est continue, donc d'après l'encadrement ci-dessus, et d'après le théorème des gendarmes, $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$ tend vers $f(x)$.

On a donc $\lim_{h \to 0} \left(\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \right) = f(x)$ c'est à dire $F'(x) = f(x)$

➜ Expliquons brièvement le cas où $h < 0$. Dans ce cas $x + h < x$.

On démontre que : $f(x+h) \leqslant \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant f(x)$

puis on fait tendre h vers zéro et en utilisant le théorème des gendarmes, on démontre de même que $F'(x) = f(x)$.

11.4 Primitives

11.4.a Définition et propriétés de primitive d'une fonction

Définition 11.2

Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I.
Dire que F est une primitive de f sur I signifie que f est la dérivée de F sur I, c'est à dire $\mathrm{F}' = f$

Exemple

Soit la fonction F définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x^2 + 3x$

et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

Pour tout nombre x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$

f est la dérivée de F sur $\mathbb{R}$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Propriété 11.2

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Alors
- la fonction f admet une infinité de primitives
- toute primitive de f est de la forme $x \longmapsto \mathrm{F}(x) + c$, où c est un nombre réel.

Exemple

On reprend les fonctions f et F de l'exemple précédent.

Les fonctions F_2 et F_3 définies par $\mathrm{F}_2(x) = x^2 + 3x + 5$ et $\mathrm{F}_3(x) = x^2 + 3x - 4$

sont des primitives de f, en effet, pour tout nombre x de $\mathbb{R}$,

$\mathrm{F}_2'(x) = 2x + 3 = f(x)$ et $\mathrm{F}_3'(x) = 2x + 3 = f(x)$

et pour nombre x de $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{F}_2(x) = \mathrm{F}(x) + 5$ et $\mathrm{F}_3(x) = \mathrm{F}(x) - 4$

Propriété 11.3 (Fonction continue et primitive)

Toute fonction continue définie sur un intervallle $[a\ ;\ b]$ admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration

Nous avons démontré au paragraphe 11.3 que pour une fonction f continue, positive et croissante, la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f $(F' = f)$, et nous l'avons admis pour une fonction continue et positive.

Si f est une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$, elle admet un minimum m sur $[a\ ;\ b$, autrement dit, pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \geqslant m$, et par conséquent $f(x) - m \geqslant 0$.

Posons alors : $g(x) = f(x) - m$ et ainsi $g(x) \geqslant 0$.

La fonction g est par conséquent positive et continue sur $[a\ ;\ b]$, puisque f est continue sur $[a\ ;\ b]$.

On définit alors : $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ et on sait que G est une primitive de g d'après la propriété du paragraphe 11.3.

Posons maintenant : $F(x) = G(x) + mx$ Ainsi : $F'(x) = G'(x) + m = (f(x) - m) + m = f(x)$

On a donc déterminé une primitive de f, et on sait que toutes les fonctions de la forme $F + k$, où k est une constante, sont des primitives de f.

11.4.b Détermination de primitives

La propriété et les deux tableaux ci-dessous sont utiles pour déterminer des primitives. On les obtient en lisant des tableaux de dérivation « à l'envers ».

Propriété 11.4

Soient U et V des primitives respectives des fonctions u et v sur un intervalle I, et k un nombre réel.
Alors U + V est une primitive de $u + v$ sur I et kU est une primitive de ku sur I

Tableau 1
Dans le tableau ci-dessous :
f désigne une fonction définie sur un intervalle I, F est une primitive de f, et c est une constante.

$f(x)$	$F(x)$	I
k constante	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]-\infty\ ;\ 0[$ ou $]0\ ;\ +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0\ ;\ +\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{ax+b}$ $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}\ln(ax+b) + c$	$]-\infty\ ;\ -\frac{b}{a}[$ ou $]-\frac{b}{a}\ ;\ +\infty[$
e^{ax+b} $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Tableau 2
Dans ce tableau, u est une fonction dérivable sur un intervalle I, et n est un nombre entier.

Fonctions	Primitives
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u

Remarque : il arrive que pour une fonction donnée, on ne puisse pas déterminer une primitive à l'aide des fonctions de références, par exemple la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ [1]

Déterminer une primitive avec la calculatrice TI 89

Par exemple une primitive de la fonction définie par $f(x) = x^2$ est la fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$

Appuyer sur les touches HOME F3

Dans le menu déroulant, choisir : `2:∫ integrate` puis compléter ainsi : `∫(x^2,x)`

Déterminer une primitive avec GeoGebra

Reprenons l'exemple précédent : une primitive de la fonction définie par $f(x) = x^2$ est la fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$

Ouvrir GeoGebra.

1. On retrouvera cette fonction dans le chapitre de probabilité « Loi à densité ».

Cliquer sur le menu *Affichage*, puis sur *Calcul formel*, et fermer les autres fenêtres.

Cliquer dans la ligne numérotée 1, et saisir « Intégrale ».

On voit une liste, choisir Intégrale[<Fonction>, <Variable>]

Compléter ainsi : Intégrale[x^2, x]

Appuyer sur $\boxed{\text{Entrer}}$

Le résultat s'affiche en dessous : $\mathbf{\frac{1}{3}\,x^3 + c_1}$

11.5 Intégrale d'une fonction

11.5.a Formule fondamentale pour une fonction continue et positive

Pour une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, on a défini au paragraphe 11.1 l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ comme une aire sous la courbe de f.

On a vu aussi que f admet des primitives sur $[a\ ;\ b]$. Soit F une de ces primitives.

On sait aussi que la fonction définie par $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.

Comme F et G sont des primitives de f sur $[a\ ;\ b]$, on sait qu'il existe une constante k telle que $F(x) = G(x) + k$.

Remplaçons alors x par a, on a alors : $F(a) = G(a) + k = \displaystyle\int_a^a f(t)dt + = 0 + k = k$, donc $k = F(a)$.

Donc, pour tout réel x de $[a\ ;\ b]$, on a $F(x) = G(x) + F(a)$, autrement dit $G(x) = F(x) - F(a)$.

En remplaçant maintenant x par b, on obtient $G(b) = F(b) - F(a)$, c'est à dire $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$.

Exemple 1

Reprenons la fonction affine donnée en exemple au début de ce cours, au paragraphe 11.2 et calculons l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 (x+1)\,dx$ avec la formule de la définition 11.3.

$f(x) = x + 1$ On détermine une primitive de f : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$

Ainsi : $\displaystyle\int_2^4 (x+1)\,dx = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(2) = \left(\frac{4^2}{2} + 4\right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2\right) = \frac{16}{2} + 4 - \frac{4}{2} - 2 = \boxed{8}$.

Exemple 2

Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 \mathrm{e}^x\,dx$.

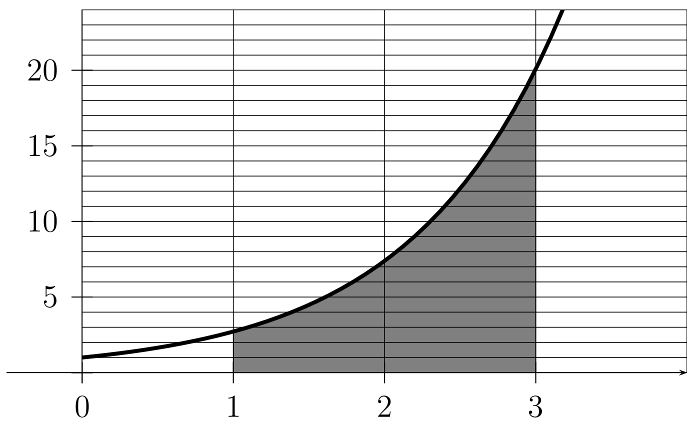
On a : $f(x) = \mathrm{e}^x$

On détermine une primitive de f : $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi :

$\displaystyle\int_1^3 (x+1)\,dx = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(1)$.

$\displaystyle\int_1^3 (x+1)\,dx = \boxed{\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}} \approx 17,37$



11.5.b Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

On étend la formule fondamentale du paragraphe précédent aux fonctions continues de signe quelconque, d'où la définition et la formule ci-dessous.

Définition 11.3

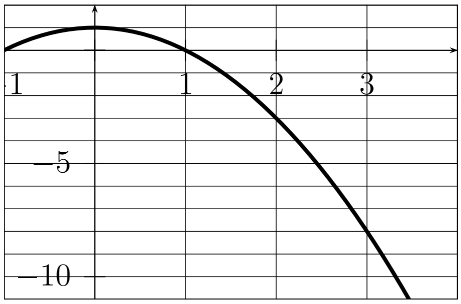
Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, et si a et b sont deux nombres de cet intervalle, on appelle intégrale de a à b de f l'expression $F(b) - F(a)$.

On écrit : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Exemple

Calculons $\displaystyle\int_0^3 (1-x^2)\,dx$ $\quad f(x) = 1-x^2 \quad \mathrm{F}(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$

$$\int_0^3 (1-x^2)\,dx = \mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(0) = \left(3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) = \boxed{-3}.$$



Remarque

Comme le montre l'exemple ci-dessus, l'intégrale d'une fonction de signe quelconque n'est pas toujours positive, et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est négative, que représente le résultat par rapport à l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$?

Nous allons donc étudier
- le cas d'une intégrale d'une fonction continue de signe constant sur un intervalle $[a\ ;\ b]$;
- le cas d'une intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.

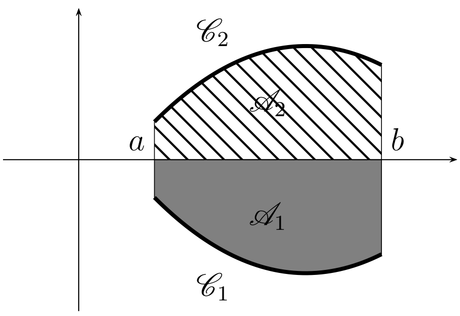
■ Intégrale d'une fonction de signe constant

Une fonction continue de signe constant sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ est soit positive sur $[a\ ;\ b]$, et ce cas a déjà été étudié, soit négative sur $[a\ ;\ b]$, et ce cas est étudié ci-dessous..

▸ Intégrale d'une fonction continue négative

Soit f est une fonction continue négative sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_1$.

On appelle $\mathscr{A}_1$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, partie grisée sur la figure ci-dessous.



Puisque f est une fonction continue négative sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors une primitive F de f est décroissante sur $[a\ ;\ b]$, puisque $F' = f$, or $a \leqslant b$, donc $F(a) \geqslant F(b)$, par conséquent $F(b) - F(a) \leqslant 0$, c'est dire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$.

L'intégrale d'une fonction continue négative est donc négative, mais quel est le lien entre ce résultat négatif et l'aire $\mathscr{A}_1$?

Considérons maintenant la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction $-f$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. Attention, la fonction $-f$ est positive puisque f est négative.

On appelle $\mathscr{A}_2$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$,

Les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, par conséquent les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Justifions maintenant par un calcul que les intégrales de f et de $-f$ sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ sont opposées. Pour cela, calculons l'intégrale de $-f$. Il nous faut donc une primitive de $-f$ qui est $-F$.

$$\int_a^b \big(-f(x)\big)\,dx = \big(-F(b)\big) - \big(-F(a)\big) = -F(b) + F(a) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Donc les intégrales de f et de $-f$ sur le même intervalle sont opposées, et pour les aires, on a :

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \int_a^b \big(-f(x)\big)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

▸ **Conclusion pour l'intégrale d'une fonction continue de signe constant**

Nous savions donc que pour une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Nous venons de justifier que pour une fonction continue f et négative sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, est égale à $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,dx$.

Nous obtenons donc la propriété ci-dessous.

Propriété 11.5 (Intégrale d'une fonction de signe constant)

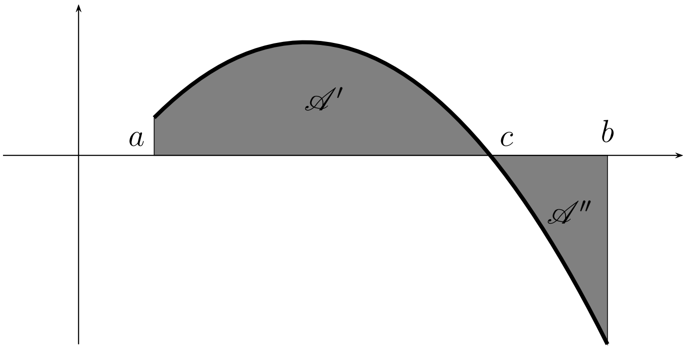
Pour une fonction continue f et de signe constant sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, est égale à $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

■ Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ n'est pas forcément positive sur $[a\ ;\ b]$ ou négative sur $[a\ ;\ b]$, elle peut changer de signe sur $[a\ ;\ b]$.

Considérons par exemple un nombre c compris entre a et b, une fonction f continue sur $[a\ ;\ b]$, positive sur $[a\ ;\ c]$, et négative sur $[c\ ;\ b]$, et nommons les aires suivantes :

- $\mathscr{A}'$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = c$,
- $\mathscr{A}''$ l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = c$ et $x = b$.



On peut décomposer l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ en la somme de deux intégrales en écrivant le calcul ci-dessous.

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$

Donc : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Or, f est positive sur $[a\ ;\ c]$, donc $\int_a^c f(x)\,dx = \mathscr{A}'$,

et f est négative sur $[c\ ;\ b]$, donc $\int_c^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}''$.

Donc : $\int_a^b f(x)\,dx = \mathscr{A}' - \mathscr{A}''$.

Ainsi, dans ce cas l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ n'est pas égale à la somme des aires $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ mais égale à leur différence.

Par conséquent la somme des aires $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$, s'obtient ainsi : $\mathscr{A}' + \mathscr{A}'' = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$

11.5.c Utilisation des calculatrices

Calculons l'intégrale $\int_2^4 (x+1)\,dx$ à l'aide de la calculatrice.

TI 82

Appuyer sur les touches math 9. On obtient l'affichage : `fonctIntégr(`

Compléter ainsi : `fonctIntégr(X+1,X,2,4)`

TI 89

Touches HOME F3(Calc) choisir `2:∫( integrate`

Compléter ainsi : `∫(x+1,x,2,4)`

CASIO

Touche MENU, choisir RUN touches OPTN F4 (CALC) F4 (∫dX)

Compléter ainsi : $\int_2^4 \mathsf{X}+1\,\mathsf{d}x$

11.5.d Utilisation de GeoGebra

Calculons l'intégrale $\int_2^4 (x+1)\,dx$ à l'aide de GeoGebra.

Cliquer sur le menu *Affichage*, puis sur *Calcul formel*.

Fermer les autres fenêtres.

Cliquer dans la ligne numérotée 1, et saisir « Intégrale ».

On voit une liste, choisir Intégrale[<Fonction>, <x min>, <x max>]

Compléter ainsi : Intégrale[x+1, 2, 4]

Appuyer sur $\boxed{\text{Entrer}}$

Le résultat exact s'affiche en dessous.

11.6 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 11.4

Soient a et b deux nombres tels que $a < b$ et une fonction f admettant une primitive sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. La valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ est le nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

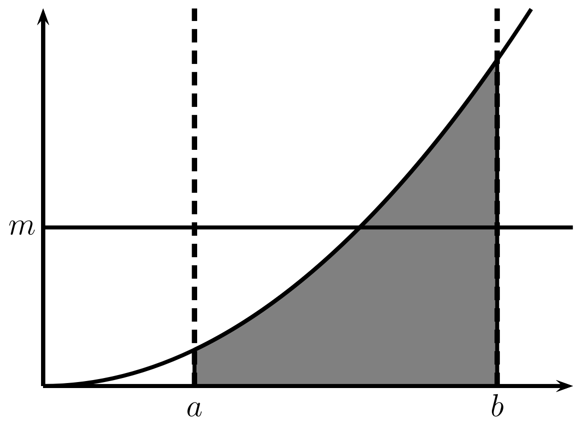
Remarque

Si on appelle m cette valeur moyenne, on a l'égalité

$m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

donc $\quad m \times (b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Donc pour une fonction f positive, cela signifie graphiquement que l'aire du rectangle de largeur $b-a$ et de hauteur m est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.



11.7 Propriétés de l'intégrale

Propriété 11.6 (Linéarité (1))

Soient f et g deux fonctions admettant chacune une primitive sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.
alors : $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Propriété 11.7 (Linéarité (2))

Soient f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.
alors : $\displaystyle\int_a^b (k \times f(x))\,dx = k \times \int_a^b f(x)\,dx$.

Propriété 11.8 (Signe d'une intégrale)

Soient f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.

- Si $f \geqslant 0$ sur l'intervalle I, et si $a \leqslant b$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant 0$ sur l'intervalle I, et si $a \leqslant b$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$.

Propriété 11.9 (Relation de Chasles)

Soient f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I, et a, b, c trois nombres de cet intervalle, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.

Remarque – Interprétation pour les aires
Pour une fonction f positive, si $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles traduit le fait que les aires s'ajoutent comme on le voit sur la figure ci-contre.