Chapitre 2

Calcul numérique, littéral et équations

I Exercices

2.1 Puissances et notations scientifiques

Exercice 2.1 (Problème de l'échiquier de Sissa)

Selon la légende, en 1256, le roi indien Shirham aurait demandé à son grand vizir Sissa Ben Dahir quelle récompense il souhaitait pour avoir inventé le jeu d'échecs.

Sissa répondit ainsi : « Majesté, je serais heureux si vous m'offriez un grain de blé que je placerais sur la première case de l'échiquier, deux grains pour la deuxième case, et ainsi de suite pour les soixante-quatre cases en multipliant par deux chaque fois ».

1. Calculer le nombre de grains de riz sur la 64^{e} case.
2. Sachant que le poids d'un grain de riz est environ 0,04 g, calculer le poids en tonnes des grains de riz de la 64^{e} case.
3. Sachant que la production mondiale de riz en 2019 est d'environ 2 710 millions de tonnes, calculer le nombre d'années nécessaires pour produire cette quantité de riz.

Exercice 2.2

Un code d'accès doit comporter 4 lettres. Calculer le nombre de codes possibles.

Exercice 2.3

Une ville a une population de 20 000 habitants, et cette population est multipliée par 1,05 chaque année.

1. Calculer sa population après 10 ans. Arrondir à l'unité.
2. Après combien d'années la population dépasse-t-elle 50 000 habitants pour la première fois ? Détailler les calculs.

Exercice 2.4

1. Détailler les calculs effectués par ce programme Scratch.
2. Quelle est la valeur de la variable nombre à la fin ?
3. Écrire cette valeur finale sous la forme d'une puissance.

À la maison, on pourra saisir et exécuter ce programme dans Scratch 3 en ligne en utilisant un des deux liens ci-dessous.

`http://www.ac-grenoble.fr/maths/scratch/`

`https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted`

Exercice 2.5

Sachant que la vitesse de la lumière est 300 000 km par seconde, calculer la distance parcourue par la lumière en une année de 365 jours. On détaillera les calculs et on donnera la réponse en km sous forme de nombre entier et sous forme de notation scientifique.

2.2 Règles de calculs sur les puissances

2.2.a Des exemples pour comprendre les règles de calculs

Exercice 2.6

1. Écrire $a^2 \times a^3$ sous la forme d'une seule puissance.
2. Simplifier l'expression $\dfrac{a^7}{a^4}$ puis écrire le résultat sous la forme d'une seule puissance.
3. Compléter ci-dessous :
   $a^n \times a^p = a^{\cdots\cdots}$ $\qquad \dfrac{a^n}{a^p} = a^{\cdots\cdots}$

Exercice 2.7

1. Écrire l'expression $\dfrac{a^6}{a^6}$ de deux façons :
   $\dfrac{a^6}{a^6} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{a^6}{a^6} = a^{\cdots\cdots}$
2. D'après les deux réponses précédentes $a^0 = \ldots\ldots$

Exercice 2.8

1. Simplifier l'expression $\dfrac{a^2}{a^6}$ 2. Compléter $\dfrac{a^2}{a^6} = a^{\cdots\cdots}$ 3. Compléter $\dfrac{1}{a^n} = a^{\cdots\cdots}$

Exercice 2.9

1. Écrire $(a^2)^3$ sous la forme d'une seule puissance. **2.** Compléter : $(a^n)^p = a^{\cdots\cdots}$

Exercice 2.10

1. Transformer $(a \times b)^3$ sous la forme $a^{\cdots} \times b^{\cdots}$
2. Compléter : $(a \times b)^n = a^{\cdots} \times b^{\cdots}$
3. Transformer $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ sous la forme $\frac{a^{\cdots}}{b^{\cdots}}$
4. Compléter : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^{\cdots}}{b^{\cdots}}$

2.2.b Exercices pour s'entraîner

Exercice 2.11

Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

1. $7^2 \times 7^3$ **2.** $\frac{5^8}{5^6}$ **3.** $\frac{3^2}{3^7}$ **4.** $(7^2)^8$ **5.** $4^5 \times 6^5$ **6.** $\frac{15^4}{3^4}$

Exercice 2.12

Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'une seule puissance.

1. $x \times x^2$ **2.** $\frac{a^9}{a^6}$ **3.** $\frac{b^2}{b^{10}}$ **4.** $(y^3)^5$ **5.** x^2y^2 **6.** $9x^2$

Exercice 2.13

Le nombre de secondes en un an est environ 3×10^7 secondes. Sans calculatrice, calculer sous forme de notation scientifique la distance parcourue en km par un objet qui se déplace à la vitesse de 2×10^4 kilomètres par seconde.

Exercice 2.14

Un objet parcourt 7×10^{12} mètres en 2×10^8 secondes. Sans calculatrice, calculer sous forme de notation scientifique sa vitesse moyenne en mètres par seconde.

Exercice 2.15 (Volume du soleil)

Le soleil est une sphère dont le rayon est environ égal à $R \approx 7 \times 10^8$ m. Calculer son volume en m^3 sachant que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

1. On effectuera d'abord les calculs sans calculatrice, et on donnera le résultat en fonction de π.
2. On donnera ensuite le résultat en notation scientifique.

2.3 Règles de calculs sur les racines carrées

Exercice 2.16

1. Pour deux nombres a et b positifs, simplifier l'expression $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2$ en appliquant les règles sur les puissances.
2. Compléter : $\sqrt{ab} =$ ....
3. Pour deux nombres a et b positifs, $b \neq 0$, simplifier l'expression $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ en appliquant les règles sur les puissances.
4. Compléter : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} =$ ....

Dans le cours, lire la propriété 2.3, puis passer aux exercices suivants.

Exercice 2.17

Écrire sous la forme d'un nombre entier les expressions suivantes. Détailler les calculs et utiliser la propriété 2.3.

1. $\sqrt{2}\sqrt{18}$ **2.** $\sqrt{5}\sqrt{20}$ **3.** $\sqrt{8}\sqrt{18}$ **4.** $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ **5.** $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ **6.** $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

Exercice 2.18

Dans Geogebra, on va dans le menu Affichage, on sélectionne Calcul Formel, et on saisit sqrt(20) qui signifie $\sqrt{20}$, et le résultat affiché est alors : $2\sqrt{5}$.

Il se passe la même chose sur certaines calculatrices.

Justifier ce résultat. Indication : décomposer 20 en produit.

Exercice 2.19

Écrire chacun des nombres ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers positifs et b le plus petit possible.

1. $\sqrt{18}$ **2.** $\sqrt{12}$ **3.** $\sqrt{300}$ **4.** $\sqrt{72}$

2.4 Distributivité, identités remarquables

2.4.a Développements

Avant de faire l'exercice ci-dessous, voir les exemples 2.4, 2.5, 2.6 page 20.

Exercice 2.20

Effectuer les calculs suivants sans calculatrice, en faisant des développements.

1. 30×201 **2.** 41×52 **3.** 19×51

Exercice 2.21

Effectuer les calculs suivants sans calculatrice, en faisant des développements.

1. 40×199 **2.** 32×51 **3.** 19×29

Avant de faire l'exercice ci-dessous, voir les exemples 2.7, 2.8, 2.9. page 20.

Exercice 2.22

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $x \times (x-5)$ **2.** $(x+4)\times(x+6)$ **3.** $(x-2)\times(x-4)$

Exercice 2.23

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $x \times (x+5)$ **2.** $(x+1)\times(x+9)$ **3.** $(x+3)\times(x-7)$

Avant de faire les exercices ci-dessous, voir les exemples 2.10 et 2.11 et page 21.

Exercice 2.24

Effectuer les calculs suivants sans calculatrice.

1. 29×31 **2.** 302×298 **3.** $999 \times 1\,001$

Exercice 2.25

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $(x-5)(x+5)$ **2.** $(x-7)(x+7)$ **3.** $(x-10)(x+10)$

Exercice 2.26

Développer et réduire les expressions suivantes : **1.** $(x+4)(x-5)$ **2.** $(x-6)(x+6)$

Exercice 2.27

Compléter les développements ci-dessous.

$(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) =$ ....

$(a-b)^2 = (a-b)\times(a-b) =$ ....

Avant de faire les exercices ci-dessous, voir les exemples 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, page 21.

Exercice 2.28

1. Sans calculatrice, calculer 501^2 et 998^2.

2. Développer et réduire les expressions $(x+7)^2$ et $(x-4)^2$

Exercice 2.29

Développer et réduire les expressions suivantes : **1.** $(x+3)^2$ **2.** $(x-5)^2$

Exercice 2.30

Compléter :

1. $(a \ldots b)^2 = (\ldots - 2ab \;\ldots\; \ldots)$ **2.** $(a \;\ldots\; \ldots)(a \;\ldots\; \ldots) = a^2 - b^2$

3. $(a \;\ldots\; \ldots)^2 = (\ldots\; + 2ab + b^2)$ **4.** $(\ldots\; \ldots\; \ldots)^2 = (x^2 + 10x \;\ldots\; \ldots)$

5. $(x - \;\ldots\ldots)^2 = (\ldots\ldots\ldots\ldots + 9)$

2.4.b Factorisations

Avant de faire les exercices ci-dessous, voir les exemples 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 page 21.

Exercice 2.31

Factoriser les expressions ci-dessous.

1. $x^2 + 7x$ **2.** $x^2 - 6x$ **3.** $x^2 - 3x$ **4.** $x^2 + x$

Exercice 2.32

Factoriser les expressions ci-dessous.

1. $10x + 15$ **2.** $21x - 12$ **3.** $2x + 8$ **4.** $7x - 35$

Exercice 2.33

Factoriser les expressions ci-dessous.

1. $(x+1)^2 - 25$ **2.** $(x-2)^2 - 16$ **3.** $(x-3)^2 - 36$ **4.** $(x+4)^2 - 9$

2.5 Équations

Avant de faire les exercices ci-dessous, voir les exemples 2.21, 2.22 page 22.

Exercice 2.34

Résoudre les équations ci-dessous.

1. $x + 9 = 11$ **2.** $x - 3 = 8$ **3.** $6x = 54$ **4.** $7x = 8,4$

Exercice 2.35

Résoudre les équations ci-dessous.

1. $4x - 9 = 6$ **2.** $6x - 11 = 0$ **3.** $8x - 1 = 5x + 9$

Avant de faire l'exercice ci-dessous, voir le cours, paragraphe 2.8 page 22 (la propriété et l'exemple).

Exercice 2.36

Résoudre les équations ci-dessous.

1. $(x-2)(4x-7) = 0$ **2.** $(x+4)(x-6) = 0$ **3.** $(2x+1)(7x+15) = 0$

Exercice 2.37

Résoudre les équations ci-dessous, lorsque c'est possible, sinon indiquer qu'il n'y a pas de solutions.

1. $x^2 = 9$ **2.** $x^2 = 1$ **3.** $x^2 = 0$ **4.** $x^2 = 5$ **5.** $x^2 = -8$

2.6 Autres exercices

Exercice 2.38

$f(x) = (x-8)(x+3)$

1. Développer et réduire l'expression $f(x)$.

2. On a maintenant l'expression $f(x)$ sous la forme factorisée et sous la forme développée réduite. Pour répondre aux questions suivantes, choisir la meilleure des deux expressions pour ce qui est demandé.

- **a)** Calculer $f(x)$ lorsque $x = 0$.
- **b)** Calculer $f(x)$ lorsque $x = 8$.
- **c)** Calculer $f(x)$ lorsque $x = -3$.
- **d)** Calculer $f(x)$ lorsque $x = 10$.
- **e)** Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2.39

$f(x) = (x+7)(x-1)$

1. Développer et réduire l'expression $f(x)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. Calculer $f(x)$ lorsque $x = 0$.

4. Calculer $f(x)$ lorsque $x = 1$.

5. Calculer $f(x)$ lorsque $x = 100$.

II Cours

2.1 Le programme

Contenus

- Règles de calcul sur les puissances entières relatives, sur les racines carrées. Relation $\sqrt{a}^2 = |a|$
- Identités $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, à savoir utiliser dans les deux sens.

Capacités attendues

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée réduite) d'une expression en vue de la résolution d'un problème.
- savoir résoudre une équation du premier degré à une inconnue
- savoir résoudre une équation produit

Exemple d'algorithme

Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.

2.2 Les puissances

Définition 2.1 (Puissance d'exposant entier positif)

Pour un nombre réel a on a les égalités :
$a^0 = 1 \quad a^1 = a$ et pour un nombre entier naturel $n \geqslant 2$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
L'expression a^n se lit « a puissance n » et le nombre n s'appelle l'exposant.

Définition 2.2 (Puissance d'exposant entier négatif)

Pour un nombre réel a et un nombre entier naturel n, on a l'égalité : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Propriété 2.1 (Notation scientifique d'un nombre décimal)

Tout nombre décimal d peut s'écrire sous la forme $d = a \times 10^n$
où n est un entier et a est un nombre décimal tel que $1 \leqslant a < 10$.
L'expression $a \times 10^n$ s'appelle la notation scientifique de d.

Propriété 2.2 (Règles de calculs sur les puissances)

Pour deux réels a et b et pour deux entiers n et p, on a les égalités
$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad (a^n)^p = a^{n\times p} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

2.3 Les racines carrées

Définition 2.3 (Racine carrée)

Pour un nombre réel positif a, le nombre positif dont le carré est égal à a, est la racine carrée de a et se note $\sqrt{a}$.

Propriété 2.3

Pour deux réels a et b positifs, on a les égalités suivantes :
$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et, si $b \neq 0$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemple 2.1

$\sqrt{10} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$ $\quad \sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{21}$ $\quad \sqrt{\dfrac{6}{11}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}$ $\quad \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{13}{8}}$

Exemple 2.2

Écrivons sous la forme d'un entier les deux expressions $\sqrt{2} \times \sqrt{5\,000}$ et $\dfrac{\sqrt{810}}{\sqrt{10}}$.

$\sqrt{2} \times \sqrt{5\,000} = \sqrt{2 \times 5\,000} = \sqrt{10\,000} = \boxed{100}$ $\quad \dfrac{\sqrt{810}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\dfrac{810}{10}} = \sqrt{81} = \boxed{9}$

Exemple 2.3

Écrivons $\sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers positifs et b le plus petit possible.

$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = \boxed{4\sqrt{2}}$

On pourrait aussi effectuer le calcul ainsi : $\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{4} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$. On arrive bien à une expression de la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux nombres entiers positifs, mais b n'est pas le plus petit possible puisque dans $4\sqrt{2}$, on a $b = 2$, et dans $2\sqrt{8}$, on a $b = 8$.

2.4 Distributivité, développer

Propriété 2.4 (Distributivité)

La multiplication est distributive par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction, et pour des nombres k, a, b, c, d, on a les égalités suivantes :

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ $\quad k \times (a - b) = k \times a - k \times b$ $\quad (a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Exemple 2.4 (Développement et calcul numérique (1))

$50 \times 102 = 50 \times (100 + 2) = 50 \times 100 + 50 \times 2 = 5\,000 + 100 = \boxed{5\,100}$

Exemple 2.5 (Développement et calcul numérique (2))

$21 \times 31 = (20 + 1) \times (30 + 1) = 20 \times 30 + 20 \times 1 + 1 \times 30 + 1 \times 1 = 600 + 20 + 30 + 1 = \boxed{651}$

Exemple 2.6 (Développement et calcul numérique (3))

$49 \times 61 = (50 - 1) \times (40 + 1) = 50 \times 40 + 50 \times 1 - 1 \times 40 - 1 \times 1 = 2\,000 + 50 - 40 - 1 = \boxed{2\,009}$

Exemple 2.7 (Développement et calcul littéral (1))

$x \times (x + 6) = x \times x + x \times 6 = \boxed{x^2 + 6x}$

Exemple 2.8 (Développement et calcul littéral (2))

$(x + 2) \times (x + 3) = x \times x + x \times 3 + 2 \times x + 2 \times 3 = x^2 + 3x + 2x + 6 = \boxed{x^2 + 5x + 6}$

Exemple 2.9 (Développement et calcul littéral (3))

$(x - 1) \times (x - 5) = x \times x - x \times 5 - 1 \times x + 1 \times 5 = x^2 - 5x - x + 5 = \boxed{x^2 - 6x + 5}$

2.5 Les identités remarquables

Propriété 2.5

Pour des nombres a et b on a les égalités suivantes :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemple 2.10 (Identité remarquable et calcul numérique (1))

$99 \times 101 = (100-1) \times (100+1) = 100^2 - 1^2 = 10\,000 - 1 = 9\,999$

Exemple 2.11 (Identité remarquable et calcul littéral (1))

$(x-2) \times (x+2) = x^2 - 2^2 = \boxed{x^2 - 4}$

Exemple 2.12 (Identité remarquable et calcul numérique (2))

$201^2 = (200+1)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times 1 + 1^2 = 40\,000 + 400 + 1 = \boxed{40\,401}$

Exemple 2.13 (Identité remarquable et calcul numérique (3))

$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = \boxed{9\,801}$

Exemple 2.14 (Identité remarquable et calcul littéral (2))

$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = \boxed{x^2 + 6x + 9}$

Exemple 2.15 (Identité remarquable et calcul littéral (3))

$(x-5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = \boxed{x^2 - 10x + 25}$

2.6 Factoriser

Exemple 2.16 (Factorisation avec facteur commun (1))

$x^2 + 5x = x \times x + 5 \times x = x \times x + x \times 5 = \boxed{x \times (x+5)}$

Exemple 2.17 (Factorisation avec facteur commun (2))

$6x + 4 = 2 \times 3x + 2 \times 2 = \boxed{2 \times (3x+2)}$

Exemple 2.18 (Factorisation avec une identité remarquable (1))

$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = \boxed{(x-3) \times (x+3)}$

Exemple 2.19 (Factorisation avec une identité remarquable (2))

$(x+6)^2 - 16 = (x+6)^2 - 4^2 = (x+6-4) \times (x+6+4) = \boxed{(x+2) \times (x+10)}$

2.7 Équations du 1^{er} à une inconnue

Exemple 2.20

Résolvons les équations $x + 4 = 25$ et $5x = 35$

$x + 4 = 25 \iff x + 4 - 4 = 25 - 4 \iff x = \boxed{21}$

$5x = 35 \iff \dfrac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \dfrac{35}{5} \iff x = \boxed{7}$

Exemple 2.21

$$\begin{aligned} 3x-7=15 &\iff 3x-7+7=15+7 \\ &\iff 3x=22 \\ &\iff \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{22}{3} \\ &\iff \boxed{x=\frac{22}{3}} \end{aligned}$$

Exemple 2.22

$$\begin{aligned} 5x+6=12x-9 &\iff 5x-12x &&= -9-6 \\ &\iff -7x &&= -15 \\ &\iff x &&= \frac{-15}{-7} \\ &\iff x &&= \boxed{\frac{15}{7}} \end{aligned}$$

2.8 Équation-produit

Propriété 2.6 (Annulation d'un produit)

Si un produit est nul, alors l'un des facteurs (au moins) est nul.
Autrement dit : si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple 2.23 (Équation-produit)

$$\begin{array}{lll} (x-4)(3x-5)=0 \iff & x-4=0 \text{ ou} & 3x-5=0 \\ & x=4 & 3x=5 \\ & & x=\dfrac{5}{3} \end{array}$$

Donc : $\boxed{x=4 \text{ ou } x=\frac{5}{3}}$

2.9 Équation $x^2 = a$

Exemple 2.24

Résolvons les équations : $x^2 = 4$; $x^2 = 7$; $x^2 = 0$; $x^2 = -6$.

$x^2 = 4 \iff \boxed{x=-2 \text{ ou } x=2}$ $x^2 = 7 \iff \boxed{x=-\sqrt{7} \text{ ou } x=\sqrt{7}}$ $x^2 = 0 \iff \boxed{x=0}$

x^2 est positif, donc $\boxed{\text{l'équation } x^2=-6 \text{ n'a pas de solution}}$.