Chapitre 1

Second degré

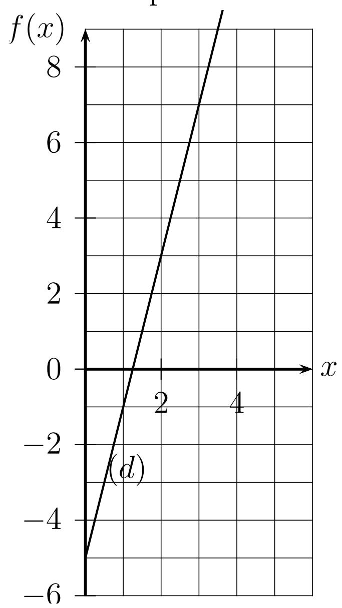
I Exercices

1.1 Fonctions, fonctions affines et du 2nd degré

Pour faire les deux exercices suivants, on pourra lire les exemples 1.1 et 1.2 page 14.

Exercice 1.1 (Image et antécédent)

La fonction f est définie par $f : x \longmapsto 4x - 5$ et elle est représentée ci-contre par la droite (d).

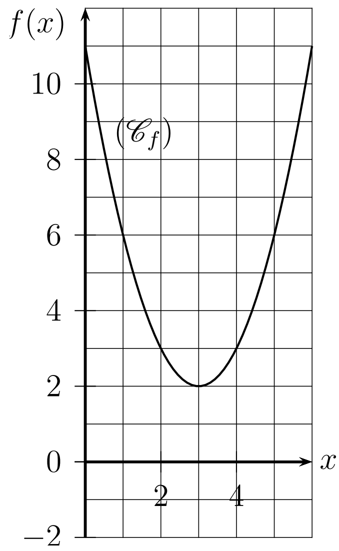


1. **Image**
   a) Calculer l'image de 2 par f.
   b) Représenter cela sur le graphique en traçant des traits.
2. **Antécédent**
   a) Déterminer l'antécédent de 8 par f, c'est à dire déterminer le nombre x tel que $f(x) = 8$.
   b) Représenter cela sur le graphique en traçant des traits.
3. L'énoncé indique que la fonction f est représentée par une droite, ce qui n'est pas le cas pour toutes les fonctions.
   a) Comment appelle-t-on les fonctions représentées par des droites ?
   b) Quelle est la formule générale pour ces fonctions ?

Exercice 1.2

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 6x + 11$ et elle est représentée ci-contre par la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

1. Déterminer graphiquement les antécédents de 6 par f.
   Tracer des traits sur le graphique.
2. Vérifier ces résultats par des calculs.



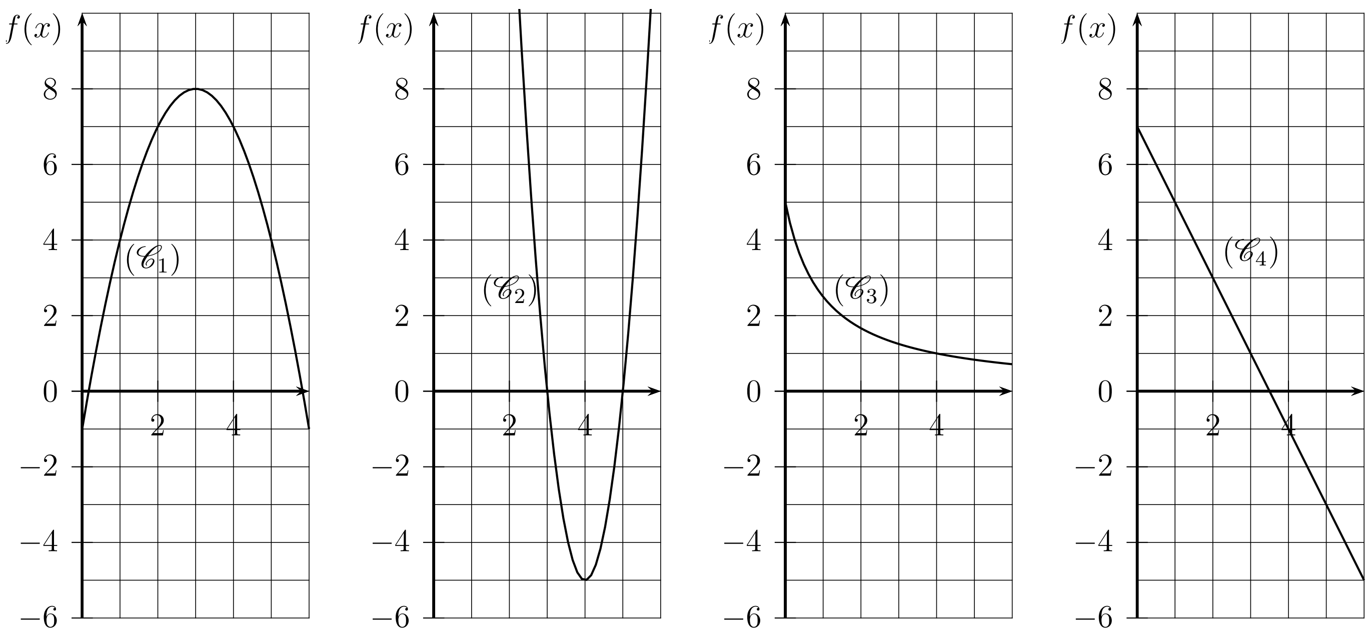
Exercice 1.3

Quatre fonctions sont définies ci-dessous, et sont représentées par les quatres courbes tracées plus bas.

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{5}{x+1}$ $\qquad f_2 : x \longmapsto -x^2 + 6x - 1$ $\qquad f_3 : x \longmapsto -2x + 7$ $\qquad f_4 : x \longmapsto 5x^2 - 40x + 75$

1. Pour chacune des courbes, indiquer quelle fonction elle représente.
2. Lire, dans le cours, le paragraphe 1.3 page 16, puis indiquer, pour ces quatre fonctions, lesquelles sont des fonctions polynômes du second degré.
3. La fonction f_3 fait partie de quelle catégorie de fonction ?

Remarque : la fonction f_1 est une fonction homographique, cela n'est pas à retenir.



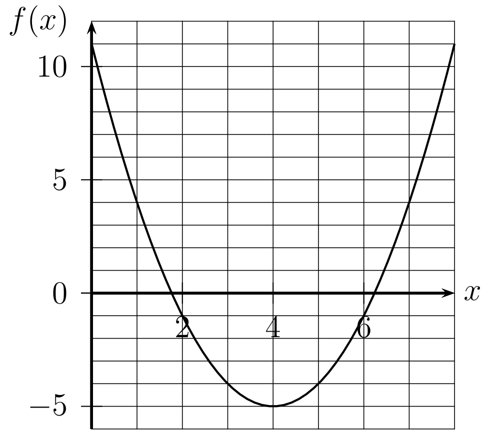
1.2 Forme factorisée (et développée réduite)

Exercice 1.4

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 8x + 11$
et elle est représentée ci-contre.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. Interpréter graphiquement la réponse.



Exercice 1.5

La fonction f est définie par $f : x \longmapsto (x-2)(x+3)$
et elle est représentée ci-contre.

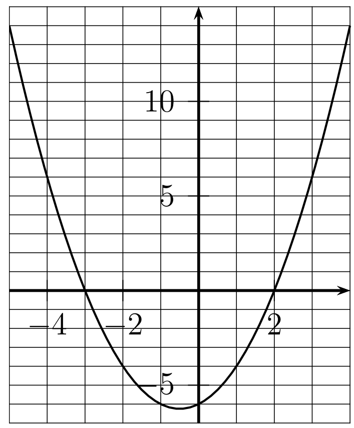
1. Développer et réduire $(x-2)(x+3)$ pour vérifier que la fonction f est bien une fonction polynôme du second degré.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. Interpréter graphiquement la réponse.

4. Indiquer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x dans le tableau ci-dessous.

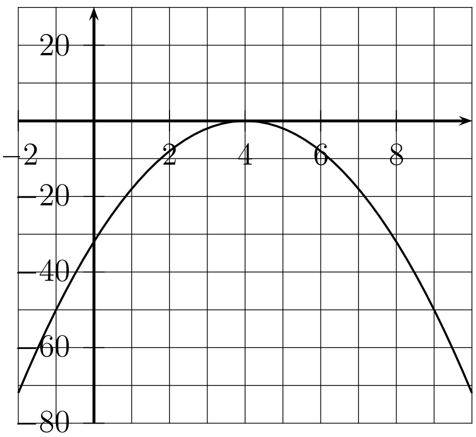
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.



x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $x-2$	
Signe de $x+3$	
Signe de $f(x)$	

Exercice 1.6

La fonction f est définie par $f(x) = -2(x-4)^2$
et elle est représentée ci-contre.



1. Développer et réduire $-2(x-4)^2$ pour vérifier que la fonction f est bien une fonction polynôme du second degré.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. Interpréter graphiquement la réponse.

4. Indiquer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x dans le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	

Exercice 1.7

Pour chacune des fonctions ci-dessus, appliquer les consignes **a)**, **b)**, **c)**, **d)**.

1. $f : x \longmapsto 3(x+4)(x+5)$ **2.** $f : x \longmapsto -5(x-3)(x-6)$ **3.** $f : x \longmapsto (2x+1)(x-7)$

4. $f : x \longmapsto 7(x+6)^2$ **5.** $f : x \longmapsto -9(x-8)^2$ **6.** $f : x \longmapsto (3x-1)^2$

a) Développer et réduire $f(x)$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c) Dresser le tableau de signes de $f(x)$ selon les valeurs de x.

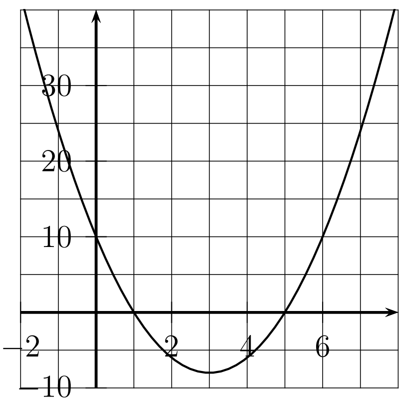
d) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

e) Vérifier graphiquement **b)** et **c)** à la calculatrice.

Exercice 1.8

La fonction f est une fonction polynôme du second degré, et elle est représentée ci-contre.

Déterminer une expression de $f(x)$.



Exercice 1.9

La fonction f est définie par : $f(x) = -5(x-4)(x+9)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.
2. Répondre aux questions suivantes en choisissant l'expression la plus utile entre la forme factorisée et la forme développée réduite.
   a) Calculer $f(0)$.
   b) Calculer $f(-9)$.
   c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   d) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

1.3 Plusieurs méthodes de factorisations

Factoriser un polynôme $f(x)$ permet de
- *résoudre l'équation $f(x) = 0$;*
- *étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x ;*
- *résoudre une inéquation comme $f(x) < 0$ ou $f(x) \geqslant 0$.*

Nous allons donc étudier différentes méthodes de factorisation.

1.3.a Factorisations à l'aide d'une racine évidente

Exercice 1.10

Factoriser $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = 4x^2 + x$.

Exercice 1.11

La fonction f est définie par $f : x \longmapsto x^2 - 5x + 4$.

1. Vérifier que $f(1) = 0$.
2. On sait alors que le trinôme $f(x)$ peut être factorisé sous la forme : $f(x) = (x-1) \times (\cdots)$.
   Compléter les pointillés pour qu'on ait : $f(x) = (x-1) \times (\ldots\ldots) = x^2 - 5x + 4$.
   On pourra voir dans le cours l'exemple 1.10 page 19.

Exercice 1.12

La fonction f est définie par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

1. Vérifier que $f(-1) = 0$.
2. On sait alors que le trinôme $f(x)$ peut être factorisé sous la forme : $f(x) = (x+1) \times (\cdots)$.
   Factoriser le polynôme $f(x)$.

Exercice 1.13

Factoriser les polynômes ci-dessous.

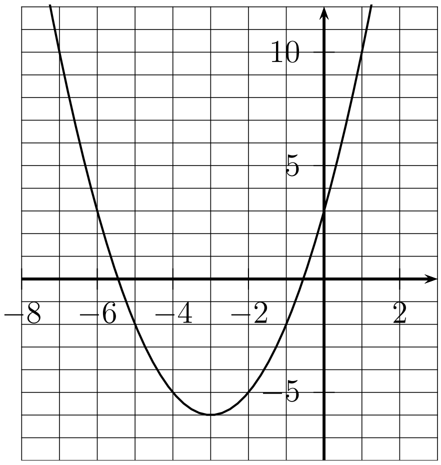
$f(x) = x^2 - 9x + 8$ $\quad$ $g(x) = 3x^2 + 5x$ $\quad$ $h(x) = x^2 + 11x + 10$ $\quad$ $k(x) = 4x^2 - 24x - 28$

Exercice 1.14

Résoudre l'inéquation $-3x^2 - 9x + 12 < 0$

Exercice 1.15

La fonction f est définie par $f : x \longmapsto x^2 + 6x + 3$ et elle est représentée ci-contre.



1. Résoudre l'équation $f(x) = 10$.

2. Interpréter graphiquement cette équation, en traçant des traits sur le graphique.

1.3.b Factoriser à l'aide de la somme et du produit des racines

Lire d'abord la propriété 1.8 page 18 et les exemples 1.9 page 19 et 1.11 page 19.

Exercice 1.16

Factoriser les trinômes ci-dessous.

1. $x^2 - 9x + 14$ **2.** $x^2 + 2x - 15$ **3.** $x^2 - 13x + 30$ **4.** $x^2 - 2x - 35$

Exercice 1.17

Factoriser les trinômes ci-dessous.

1. $3x^2 - 39x + 66$ **2.** $5x^2 - 5x - 30$ **3.** $2x^2 - 6x - 140$

Exercice 1.18

Résoudre l'équation $4x^2 + 32x - 132 = 0$

Exercice 1.19

Résoudre l'équation $\dfrac{10x - 5}{x + 1} = x + 3$.

1.3.c Factoriser à l'aide d'une identité remarquable

Exercice 1.20

Compléter les égalités ci-dessous à l'aide des identités remarquables.

1. $(x + \dots)^2 = x^2 + \dots\dots + 16$ **2.** $(x - \dots)^2 = x^2 - \dots\dots + 49$
3. $(\dots + \dots)^2 = 4x^2 + \dots\dots + 25$ **4.** $(\dots - \dots)^2 = 9x^2 - \dots\dots + 36$

Exercice 1.21

Chacune des expressions ci-dessous peut s'écrire sous la forme d'un carré. Déterminer chaque fois ce carré.

1. $x^2 + 6x + 9$ **2.** $x^2 - 10x + 25$ **3.** $16x^2 + 40x + 25$ **4.** $4x^2 - 28x + 49$

Exercice 1.22

Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles sont le développement d'un carré ?

1. $x^2 + 7x + 25$ **2.** $x^2 - 12x + 36$ **3.** $4x^2 + 13x + 9$ **4.** $9x^2 - 6x + 1$

Exercice 1.23

Factoriser $(x+4)^2 - 25$ à l'aide d'une identité remarquable. Indication : $(x+4)^2 - 25 = (x+4)^2 - 5^2$

Exercice 1.24

Factoriser les expressions ci-dessous.

1. $(x-3)^2 - 81$ **2.** $(x+7)^2 - 9$ **3.** $(x+5)^2 - 16$ **4.** $(x-2)^2 - 1$

Exercice 1.25

Factoriser $(x+3)^2 - 7$ à l'aide d'une identité remarquable. Indication : $(x+3)^2 - 7 = (x+3)^2 - \sqrt{7}^2$

Exercice 1.26

Factoriser les expressions ci-dessous.

1. $(x-4)^2 - 5$ **2.** $(x+6)^2 - 3$ **3.** $(x-3)^2 - 11$ **4.** $(x+8)^2 - 2$

Exercice 1.27

Pour chaque fonction f ci-dessous, résoudre l'équation $f(x) = 0$ et étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

1. $f(x) = 25x^2 + 10x + 1$ **2.** $f(x) = 9x^2 - 30x + 25$ **3.** $f(x) = (x+7)^2 - 5$

1.3.d Exercices divers de factorisation

Dans les exercices des paragraphes 1.3.a, 1.3.b, 1.3.c, différentes techniques de factorisation ont été abordées comme cela est indiqué dans le programme qui demande de factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies :

- *remarquer une racine évidente ;*
- *déterminer des racines par leur somme et leur produit ;*
- *utiliser une identité remarquable.*

Les exercices qui suivent utilisent ces différentes techniques de factorisation.

Exercice 1.28

Résoudre l'équation $x^2 - 11x + 10 = 0$

Exercice 1.29

Étudier le signe de $x^2 - 18x + 81$ selon les valeurs de x.

Exercice 1.30

Résoudre l'inéquation $x^2 - 10x + 21 < 0$

Exercice 1.31

Résoudre l'équation $(x-9)^2 - 7 = 0$.

1.4 Forme canonique

La forme canonique d'une fonction polynômiale du second degré est donnée par la définition 1.6 page 17.

La forme canonique d'un polynôme du second degré $f(x)$ permet
- de savoir si l'équation $f(x) = 0$ a des solutions ou pas ;
- lorsque l'équation $f(x) = 0$ a des solutions de savoir combien il y a de solutions ;
- de connaître les variations de la fonction f.

1.4.a Étude et utilisation de la forme canonique

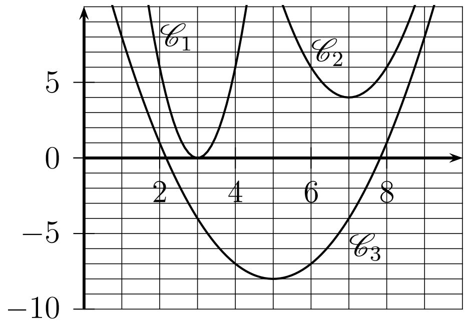
Exercice 1.32

Les fonctions f, g, h, sont définies ci-dessous.

$f : x \longmapsto (x-5)^2 - 8$ $\qquad$ $g : x \longmapsto 6(x-3)^2$ $\qquad$ $h : x \longmapsto 2(x-7)^2 + 4$

et elles sont représentées ci-dessous.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.
3. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution (indication : justifier que $h(x) \geqslant 4$).
4. Pour chaque fonction f, g, h, indiquer la courbe qui la représente.



Exercice 1.33

Compléter ci-dessous les tableaux de signes des fonctions f, g, h de l'exercice 1.32.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g(x)$	

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $h(x)$	

Exercice 1.34

Compléter ci-dessous les tableaux de variations des fonctions f, g, h de l'exercice 1.32.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de f	

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de g	

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de h	

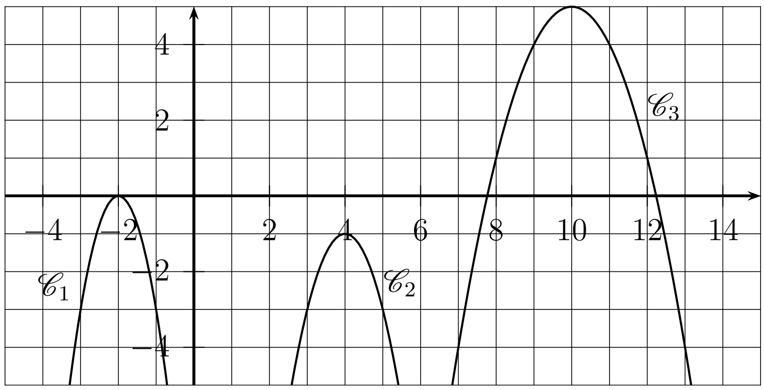
Exercice 1.35

Trois fonctions sont définies ci-dessous, et elles sont représentées ci-contre.

$f(x) = -2(x-4)^2 - 1$

$g(x) = -(x-10)^2 + 5$

$h(x) = -3(x+2)^2$



1. Pour chacune de ces fonctions, indiquer quelle est la courbe qui la représente.
2. Pour chacune des équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $h(x) = 0$,
   a) indiquer si l'équation a des solutions ou non ;
   b) si la réponse est oui, indiquer le nombre de solutions.
3. Compléter les tableaux de signe ci-dessous.

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $g(x)$	

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $h(x)$	

4. Compléter les tableaux de variations ci-dessous.

x	$-\infty$ $+\infty$
Variations de f	

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de g	

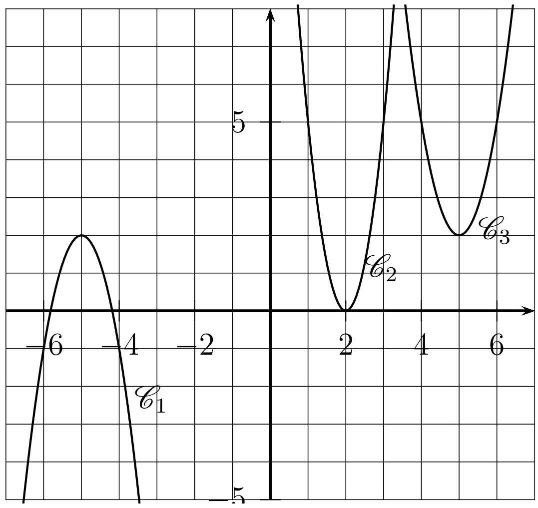
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Variations de h	

Exercice 1.36

Cinq fonctions sont définies ci-dessous et trois courbes sont tracées ci-contre.

$f_1 : x \longmapsto 2(x-5)^2+3$
$f_2 : x \longmapsto 3(x-5)^2+2$
$f_3 : x \longmapsto -3(x+5)^2+2$
$f_4 : x \longmapsto -2(x-5)^2$
$f_5 : x \longmapsto 5(x-2)^2$

Pour chacune des courbes, déterminer la fonction qu'elle représente. Il y a donc deux fonctions parmi les cinq qui ne sont pas représentées à droite.



Exercice 1.37

La fonction f est définie par : $f(x) = (x-6)^2 - 4$.

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Factoriser $f(x)$

3. Répondre aux questions suivantes en choisissant l'expression la plus utile entre la forme canonique, la forme développée réduite, et la forme factorisée.

a) Calculer $f(0)$.

b) Calculer $f(8)$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

d) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

e) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

1.4.b Mise sous forme canonique

Les exercices précédents ont montré toute l'utilité de la forme canonique pour une fonction polynôme du second degré.

Il reste donc à savoir comment écrire n'importe quelle fonction polynôme du second degré sous forme canonique.

Avant de faire les exercices ci-dessous, étudier les exemples 1.15 et 1.16 page 21.

Exercice 1.38

Écrire sous forme canonique les expressions ci-dessous

1. $x^2 + 6x$ **2.** $x^2 - 8x$ **3.** $x^2 + 5x$

Exercice 1.39

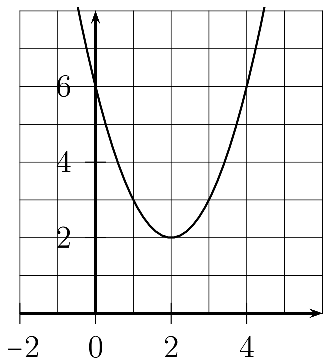
Écrire sous forme canonique les expressions ci-dessous

1. $x^2 + 12x - 3$ **2.** $x^2 - 14x + 9$ **3.** $x^2 + 3x + 1$

Exercice 1.40

La fonction f est définie par $f : x \longmapsto x^2 - 4x + 6$

1. Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 5$.
2. Vérifier graphiquement la réponse.
   Tracer des traits sur le graphique.



1.5 Discriminant et formules générales

.

Avant de traiter les exercices ci-dessous, lire le cours page 23.

Exercice 1.41

Résoudre les équations ci-dessous.

1. $x^2 + 3x + 1 = 0$ **2.** $7x^2 - 5x + 2 = 0$ **3.** $9x^2 + 6x + 1 = 0$

Exercice 1.42

Factoriser si c'est possible chacune des trinômes ci-dessous.

1. $4x^2 + 120x + 900$ **2.** $2x^2 + 8x - 234$ **3.** $3x^2 - 4x + 9 = 0$

Exercice 1.43

Étudier le signe de $-9x^2 + 12x - 4$ selon les valeurs de x.

Exercice 1.44

Résoudre l'inéquation $-2x^2 - 11x + 21 \geqslant 0$.

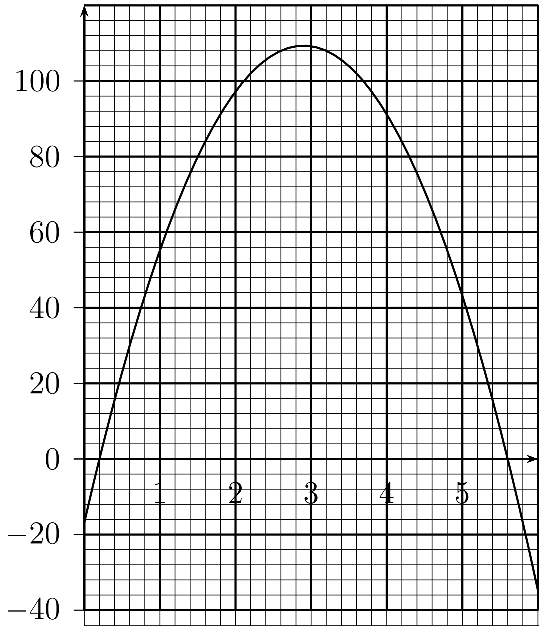
1.6 Problèmes du second degré

Exercice 1.45

Un entrepreneur lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles.

x est le nombre de centaines d'unités fabriquées.

Le bénéfice en milliers d'euros est donné par la fonction $B : x \longmapsto -15x^2 + 87x - 16,8$.



1. Répondre aux deux questions suivantes d'après le graphique, avec la précision permise par ce graphique.

a) Dans quel intervalles de valeurs doit être le nombre d'unités fabriquées pour que le bénéfice soit positif ?

b) Pour quel nombre d'unités fabriquées a-t-on un bénéfice maximal, et quel est alors le montant de ce bénéfice ? Tracer des traits sur le graphique.

2. Répondre aux deux questions précédentes par des calculs.

Exercice 1.46

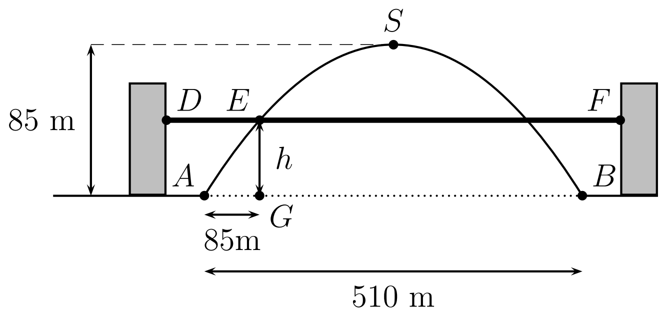
Déterminer la longueur et la largeur d'un rectangle dont l'aire est égale à 40 cm^2 et dont la longueur a 1 cm de plus que la largeur.

Exercice 1.47

Déterminer la longueur et la largeur d'un rectangle dont l'aire est égale à 28 cm^2 et dont le périmètre est égal à 26 cm.

Exercice 1.48

Sur le schéma ci-contre le segment $[DF]$ représente un pont, la courbe $\mathscr{C}$ représente un arc qui soutient ce pont, et qui culmine au point S à 85 m de haut. Cette courbe est une parabole qui représente donc une fonction du second degré. On donne les mesures suivantes :
$AB = 510$ m et $AG = 85$ m.
Calculer la hauteur h de ce pont.



Exercice 1.49

1. La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-3}$ et elle est représentée graphiquement ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$.

On rappelle que les traits en pointillés sont des asymptotes et ne font pas partie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 20$. On tracera des traits sur le graphique et on donnera sa réponse avec la précision permise par le graphique.

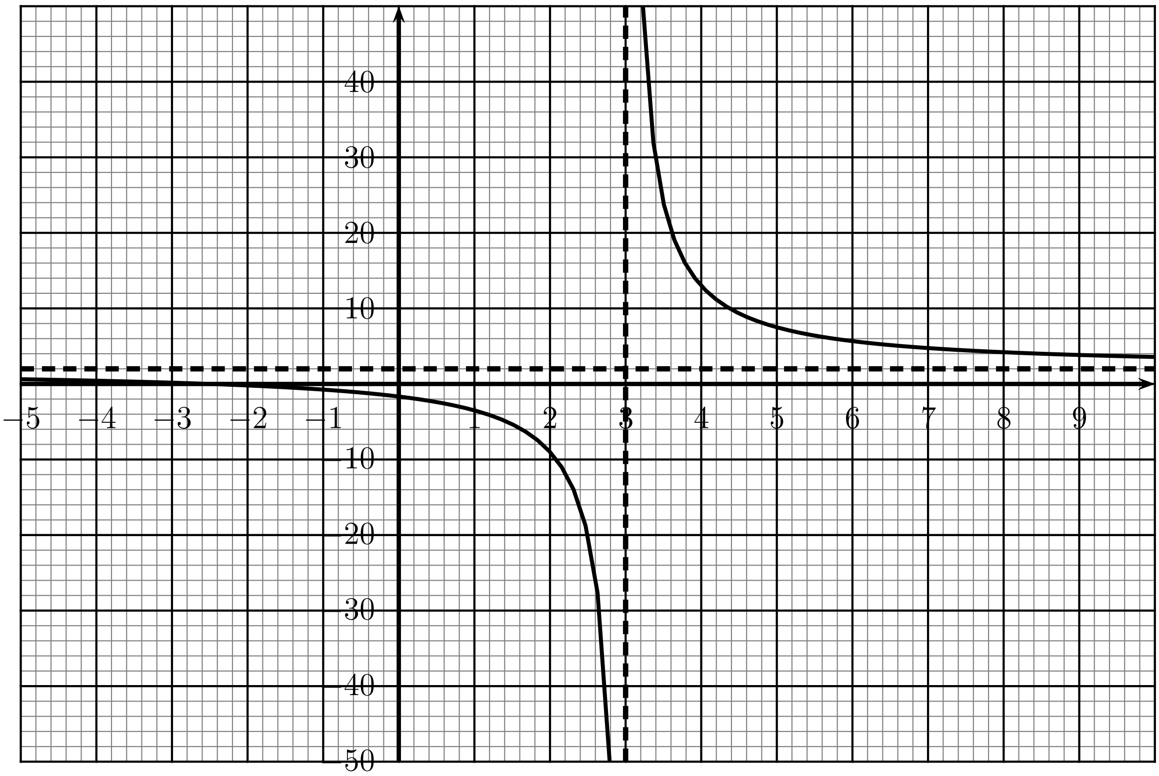
c) Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 20$.

2. La fonction g est définie par $g(x) = 3x - 4$.

a) Tracer la représentation graphique de la fonction g sur la figure ci-dessous.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. On tracera des traits sur le graphique et on donnera sa réponse avec la précision permise par le graphique.

c) Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.



II Cours

1.0 Programme

Contenus

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Capacités attendues

- Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

1.1 Rappels sur les fonctions

Exemple 1.1 (Fonction affine, image, antécédent)

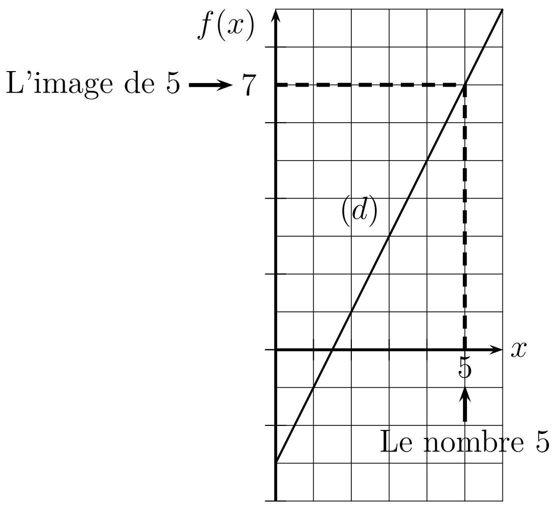
La fonction f est définie par $f \; : \; x \longmapsto 2x - 3$

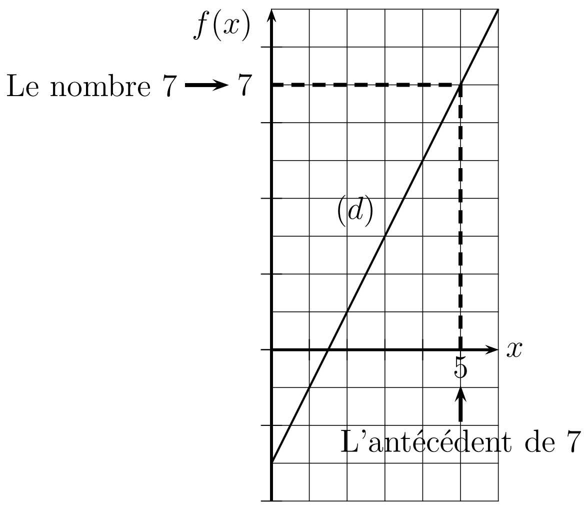
Calcul : calculons l'image de 5 par f : $f(5) = 2 \times 5 - 3 = 7$

L'image de 5 est 7. L'antécédent de 7 est 5.

Graphique

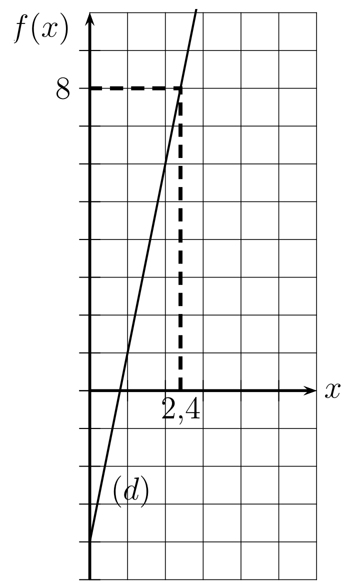
La fonction f est affine parce $2x - 3$ est de la forme $ax + b$, donc sa représentation graphique est une droite (d).





Exemple 1.2 (Fonction affine, antécédent, équation)

La fonction f est définie par $f(x) = 5x - 4$.
Déterminer l'antécédent de 8 par la fonction f.



Déterminer l'antécédent de 8 par la fonction f revient à résoudre l'équation $f(x) = 8$.

$$\begin{aligned} f(x) = 8 \quad &\iff 5x - 4 = 8 \\ &\iff 5x = 8 + 4 \\ &\iff 5x = 12 \\ &\iff x = \boxed{\frac{12}{5} = 2,4} \end{aligned}$$

1.2 Rappels de calculs

Propriété 1.1 (Distributivité)

La multiplication est distributive par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction, et pour des nombres k, a, b, c, d, on a les égalités suivantes :

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b \qquad k \times (a - b) = k \times a - k \times b \qquad (a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

Propriété 1.2 (Identités remarquables)

Pour des nombres a et b on a les égalités suivantes :
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Propriété 1.3 (Signe plus ou moins devant des parenthèses)

Si, dans une expression, il y a un signe plus devant des parenthèses, on peut
- enlever ce signe plus ;
- garder les signes de tous les termes entre parenthèses.

Si, dans une expression, il y a un signe moins devant des parenthèses, on peut
- enlever ce signe moins ;
- changer les signes de tous les termes entre parenthèses.

Exemples

$3x^2 - 5x - 8 + (6x^2 - 3x + 4) = 3x^2 - 5x - 8 + 6x^2 - 3x + 4 = \boxed{10x^2 - 8x - 4}$

$7x^2 + 4x - 9 - (3x^2 - 6x + 8) = 7x^2 + 4x - 9 - 3x^2 + 6x - 8 = \boxed{4x^2 + 10x - 17}$

Propriété 1.4 (Produit nul)

Si un produit est nul, alors l'un des facteurs (au moins) est nul.
Autrement dit : si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$

1.3 Fonctions du second degré

1.3.a Définition et exemples

Définition 1.1 (Fonction polynôme du second degré)

Soient a, b, c trois nombres réels, tels que $a \neq 0$.
La fonction f définie sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée fonction polynôme du second degré.

Propriété 1.5 (Représentation graphique)

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 s'appelle une **parabole**.
Cette parabole a un **sommet** qui correspond, selon les cas, au minimum ou au maximum de cette fonction.
Cette parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées qui passe par son sommet.

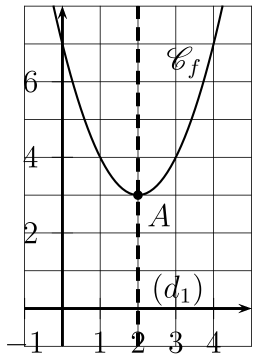
Exemple 1.3

$f(x) = x^2 - 4x + 7$ f est représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ (figure ci-contre).

La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,; 2]$ et croissante sur $[2\,; +\infty[$

Le minimum de cette fonction est 3 et il est atteint lorsque $x = 2$.

Les coordonnées du sommet A sont donc $(2\,; 3)$ et l'axe de symétrie (d_1) passe par le sommet A.

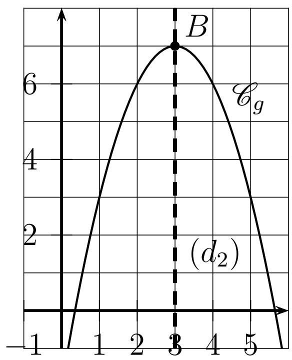


Exemple 1.4

$g(x) = -x^2 + 6x - 2$ g est représentée par la courbe $\mathscr{C}_g$. (figure ci-contre).

La fonction g est décroissante sur $]-\infty\,; 3]$ et croissante sur $[3\,; +\infty[$.

Le maximum de cette fonction est 7 et il est atteint lorsque $x = 3$. Les coordonnées du sommet B sont donc $(3\,; 7)$ et l'axe de symétrie (d_2) passe par le sommet B.

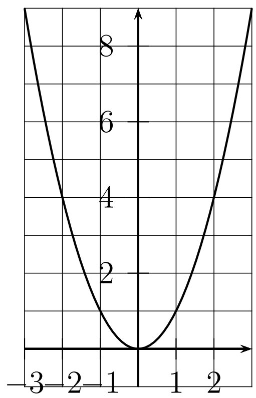


Exemple 1.5 (La fonction carré)

La fonction carré est définie par $f(x) = x^2$
La fonction carré est une fonction polynôme du 2nd degré puisque :
$x^2 = 1x^2 + 0x + 0$.
La fonction carré

- est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$,
- est croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty]$;
- atteint un minimum lorsque $x = 0$ et ce minimum est égal à zéro.

La représentation graphique de la fonction carré est une parabole qui admet comme axe de symétrie l'axe des ordonnées.



1.3.b Équation, trinôme, polynôme du second degré, racine

Définition 1.2 (Équation du second degré à une inconnue)

Une équation du second degré à une inconnue est une équation, d'inconnue x, de la forme :
$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$.

Définition 1.3 (Polynôme ou trinôme du second degré)

Un polynôme ou un trinôme du second degré est une expression de la forme $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

Définition 1.4 (Racine d'un polynôme)

Dire qu'un nombre réel r est une racine d'un polynôme $ax^2 + bx + c$ signifie que $ar^2 + br + c = 0$.
Autrement dit une racine d'un polynôme $ax^2 + bx + c$ est une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Un des objectifs de ce chapitre est de résoudre des équations du second degré à une inconnue.

Exemple 1.6

- l'équation $x^2 - 3x - 28 = 0$ est une équation du second degré à une inconnue ;
- l'expression $x^2 - 3x - 28$ est un polynôme ou un trinôme du second degré ;
- Le nombre 7 est une racine du polynôme $x^2-3x-28$ parce que : $7^2-3\times7-28 = 49-21-28 = 0$, autrement dit 7 est une solution de l'équation $x^2 - 3x - 28 = 0$.

Remarque

Résoudre l'équation $ax^2+bx+c = 0$ $(a \neq 0)$ revient à chercher les points d'intersection de la parabole qui représente la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ avec l'axe des abscisses.

1.3.c Trois formes du trinôme du 2$^{\text{nd}}$ degré

Exemple 1.7

La fonction f est définie par $f(x) = (x - 8)^2 - 9$.

L'expression $(x - 8)^2 - 9$ est appelée *forme canonique* de $f(x)$.

Développons et réduisons cette expression : $f(x) = (x-8)^2-9 = x^2-2\times x\times 8+8^2-9 = x^2-16x+55$

L'expression $x^2 - 16x + 55$ est appelée *forme développée réduite* de $f(x)$.

Remarquons que cela prouve que la fonction f est bien une fonction polynôme du second degré.

Factorisons maintenant $f(x)$:

$f(x) = (x - 8)^2 - 9 = (x - 8)^2 - 3^2 = (x - 8 - 3)(x - 8 + 3) = (x - 11)(x - 5)$

L'expression $(x - 11)(x - 5)$ est appelée *forme factorisée* de $f(x)$.

On retiendra les définitions suivantes.

Définition 1.5 (Forme développée et réduite)

La forme développée et réduite d'un trinôme du second degré est $\boxed{ax^2 + bx + c}$.

Définition 1.6 (Forme canonique)

La forme canonique d'un trinôme du second degré est $\boxed{a(x - \alpha)^2 + \beta}$.

Définition 1.7 (Forme factorisée)

La forme factorisée d'un trinôme du second degré est $\boxed{a(x-x_1)(x-x_2) \text{ ou } a(x-x_0)^2}$.

Propriété 1.6

- On peut toujours écrire un trinôme du 2nd degré sous la forme développée ou sous la forme canonique ;
- on ne peut pas toujours écrire un trinôme du 2nd degré sous la forme factorisée.

Cette propriété sera abordée plus loin.

1.4 Forme factorisée

1.4.a Fonctions du 2nd degré s'annulant en 2 nombres

Propriété 1.7

Les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux réels distincts x_1 et x_2 sont toutes les fonctions polynômes du second degré définies sous la forme $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Exemple 1.8

Déterminer la fonction polynôme du second degré f telle que $f(4) = 0$, $f(-6) = 0$, et $f(0) = 12$.

D'après la propriété précédente, $f(x) = a(x-4)(x-(-6)) = a(x-4)(x+6)$.

On sait que $f(0) = 12$, or $f(0) = a \times (0-4)(0+6) = -24a$.

Donc : $-24a = 12$, par conséquent $a = \dfrac{12}{-24} = -\dfrac{1}{2} = -0,5$.

Finalement : $\boxed{f(x) = -0,5(x-4)(x+6)}$.

1.4.b Somme et produit des racines

Propriété 1.8

Soit un polynôme du second degré qui a deux racines x_1 et x_2 :
$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) \quad (a \neq 0)$,
alors : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration

Posons : $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= a(x-x_1)(x-x_2) \\
&= a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) \\
&= a(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2) \\
&= ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2
\end{aligned}$$

Or : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Donc : $-a(x_1+x_2) = b$ et $ax_1x_2 = c$

On a donc : $-a(x_1+x_2) = b \iff x_1 + x_2 = \dfrac{b}{-a}$ et $ax_1x_2 = c \iff x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$

Nous avons bien obtenu : $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemple 1.9

$f(x) = 7(x-2)(x-3)$ dans ce cas on a : $a = 7$ $x_1 = 2$ $x_2 = 3$

Ainsi : $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$ et $x_1x_2 = 2 \times 3 = 6$

$f(x) = 7(x-2)(x-3) = 7 \times (x^2 - 3x - 2x + 6) = 7 \times (x^2 - 5x + 6) = 7x^2 - 35x + 42$

$\dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-35)}{7} = 5 = x_1 + x_2$ et $\dfrac{c}{a} = \dfrac{42}{7} = 6 = x_1x_2$

1.4.c Plusieurs méthodes de factorisations

Exemple 1.10 (Factoriser à l'aide d'une racine évidente)

Énoncé

1. Factoriser l'expression $6x^2 - 7x$.
2. Factoriser l'expression $x^2 + 8x - 9$.

Corrigé

1. Factoriser l'expression $6x^2 - 7x$.

   On appelle f la fonction définie par : $f(x) = 6x^2 - 7x$

   $6x^2 - 7x = x \times 6x - x \times 7 = \boxed{x \times (6x - 7)}$

   On a mis x en facteur, et ce qu'on appelle *racine évidente* est ici zéro parce qu'il est évident que $f(0) = 0$, en effet : $f(0) = 6 \times 0^2 - 7 \times 0 = 0$.

2. Factoriser l'expression $x^2 + 8x - 9$.

   On appelle g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 8x - 9$, et on remarque que $g(1) = 0$, en effet : $g(1) = 1^2 + 8 \times 1 - 9 = 0$.

   On dit que 1 est une racine évidente, parce que 1 est une racine de $g(x)$ et parce que le calcul ci-dessus est évident.

   Par conséquent, on peut factoriser $g(x)$ sous la forme $a(x-1)(x-x_2)$.

   Le nombre a est le coefficient de x^2, donc $a = 1$, donc $g(x) = (x-1)(x-x_2)$.

   Si l'on développe $(x-1)(x-x_2)$, on sait qu'on doit obtenir $x^2 + 8x - 9$, ce qui est schématisé ci-dessous.

   $(x-1) \times (x-x_2) = x^2 + 8x - 9.$

   Dans ce développement, on doit obtenir $(-1) \times (-x_2) = -9$, autrement dit $x_2 = -9$.

   Ainsi : $g(x) = (x-1)\big(x-(-9)\big) = \boxed{(x-1)(x+9)}$.

Exemple 1.11 (Factoriser à l'aide de la somme et du produit des racines)

Factoriser l'expression $x^2 - 7x + 10$.

On appelle x_1 et x_2 les racines de ce polynôme du second degré.

On sait, d'après la propriété 1.8 que $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $x_1x_2 = c$.

Donc : $x_1 + x_2 = \dfrac{-(-7)}{1} = 7$ et $x_1x_2 = 10$.

On peut alors remarquer que : $2 \times 5 = 10$ et que $2 + 5 = 7$.

On a finalement : $x^2 - 7x + 10 = \boxed{(x-2)(x-5)}$.

Exemple 1.12 (Factoriser en utilisant une identité remarquable (1))
Factoriser l'expression $x^2 + 8x + 16$.
$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2$ or $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Donc : $x^2 + 8x + 16 = \boxed{(x + 4)^2}$

Exemple 1.13 (Factoriser en utilisant une identité remarquable (2))
Factoriser l'expression $(x + 4)^2 - 36$.

$$\begin{aligned} (x+4)^2 - 36 &= (x+4)^2 - 6^2 \qquad \text{or } a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ &= (x + 4 - 6)(x + 4 + 6) \\ &= \boxed{(x-2)(x+10)} \end{aligned}$$

1.5 Forme canonique

La forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ a été donnée plus haut par la définition 1.6.

1.5.a Étude et utilisation de la forme canonique

Exemple 1.14

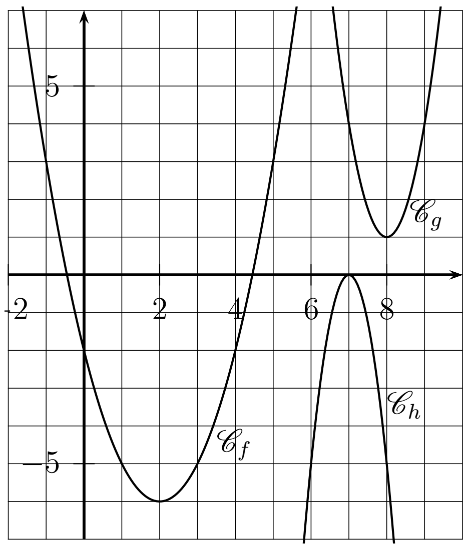
Les fonctions f, g, h, sont définies par :
$f(x) = (x - 2)^2 - 6$
$g(x) = -5(x - 7)^2$
$h(x) = 3(x - 8)^2 + 1$

Les expressions $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, sont sous la forme canonique c'est à dire $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Ces trois fonctions sont représentées ci-contre.

La forme canonique nous permet de connaître le tableau de variations de chaque fonction et de connaître le nombre de solutions des équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ et $h(x) = 0$.

C'est ce qui est détaillé ci-dessous pour les fonctions f, g, h.



Variations de f et équation $f(x) = 0$
$f(x) = (x - 2)^2 - 6$
On a $f(2) = (2 - 2)^2 - 6 = 0^2 - 6 = -6$.
Si $x \neq 2$, alors $x - 2 \neq 0$, donc $(x - 2)^2 > 0$ donc $(x - 2)^2 - 6 > -6$.
Cela prouve que la fonction f a un minimum de -6 et qu'il est atteint lorsque $x = 2$.
Le tableau de variation de la fonction f est le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-6	↗

Cela nous indique aussi que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions.

$f(x) = (x-2)^2 - 6 = (x-2)^2 - \sqrt{6}^2 = (x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6})$

Donc : $f(x) = 0 \iff (x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6}) = 0 \iff x-2-\sqrt{6} = 0$ ou $x-2+\sqrt{6} = 0$

Finalement : $f(x) = 0 \iff x = 2+\sqrt{6}$ ou $x = 2-\sqrt{6}$

Variations de g et équation $g(x) = 0$

$g(x) = -5(x-7)^2$

On a $g(7) = -5 \times (7-7)^2 = -5 \times 0^2 = 0$.

Si $x \neq 7$, alors $x - 7 \neq 0$, donc $(x-7)^2 > 0$, donc $-5(x-7)^2 < 0$.

Cela prouve que la fonction g a un maximum de 0 et qu'il est atteint lorsque $x = 7$.

Le tableau de variation de la fonction g est le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Cela nous indique aussi que l'équation $g(x) = 0$ a une solution.

$g(x) = 0 \iff -5(x-7)^2 = 0 \iff (x-7)^2 = 0 \iff x - 7 = 0 \iff x = 7$.

Variations de h et équation $h(x) = 0$

$h(x) = 3(x-8)^2 + 1$

On a $h(8) = 3 \times (8-8)^2 + 1 = 3 \times 0^2 + 1 = 1$

Si $x \neq 8$, alors $x - 8 \neq 0$, donc $(x-8)^2 > 0$, donc $3(x-8)^2 > 0$, donc $3(x-8)^2 + 1 > 1$.

Cela prouve que la fonction g a un minimum de 1 et qu'il est atteint lorsque $x = 8$.

Le tableau de variation de la fonction f est le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		8		$+\infty$
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Cela nous indique aussi que l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution.

1.5.b Mise sous forme canonique

Voyons maintenant quelques exemples de mise sous forme canonique de polynômes du second degré.

Un élève de spécialité mathématiques de première générale doit être capable d'effectuer les calculs des deux premiers exemples.

Le troisième exemple est difficile et n'est pas exigible pour un élève.

Exemple 1.15

$f(x) = x^2 + 10x = x^2 + 2 \times x \times 5$

On a ici le début du développement du carré $(x+5)^2$

On continue ainsi : $f(x) = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 - 5^2 = \boxed{(x+5)^2 - 25}$

Exemple 1.16

$f(x) = x^2 - 14x + 6 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 6 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 - 7^2 + 6 = (x-7)^2 - 49 + 6 = \boxed{(x-7)^2 - 43}$

Exemple 1.17 (Difficile !)

$f(x) = 3x^2 + 5x - 8 = 3\left(x^2 + \dfrac{5}{3}x - \dfrac{8}{3}\right) = 3\left(x^2 + 2 \times x \times \dfrac{5}{6} + \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{8}{3}\right)$

$f(x) = 3\left(\left(x + \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{25}{36} - \dfrac{96}{36}\right) = 3\left(\left(x + \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{121}{36}\right) = 3\left(x + \dfrac{5}{6}\right)^2 - 3 \times \dfrac{121}{36}$

$f(x) = \boxed{3\left(x + \dfrac{5}{6}\right)^2 - \dfrac{121}{12}}$

1.6 Discriminant et formules générales

1.6.a Forme canonique et discriminant

On démontre que pour toute fonction polynôme f du second degré, on a :

$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

On pose alors : $\Delta = b^2 - 4ac$ et on a donc : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

On retiendra la définition et la propriété ci-dessous.

Définition 1.8 (Discriminant)

Pour une fonction polynôme f du second degré, définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$,
on appelle **discriminant** et on note Δ le nombre : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 1.9 (Formule générale de la forme canonique)

Pour une fonction polynôme f du second degré, on a : $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

D'après ce qui précède, pour une fonction f du second degré, on a la propriété ci-dessous.

Propriété 1.10 (Tableau de variations)

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \ (a \neq 0)$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$

La fonction f a le tableau de variations suivant :

si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

1.6.b Équation du second degré et factorisation

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Propriété 1.11 (Équation du second degré)

Quand on résout l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, les trois cas ci-dessous peuvent se produire.
Si $\Delta < 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution.
Si $\Delta = 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
Si $\Delta > 0$ l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété 1.12 (Factorisation)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
Si $\Delta < 0$, alors l'expression $ax^2 + bx + c$ ne peut pas être factorisée.
Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

1.6.c Signe d'un trinôme

Propriété 1.13

Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c	Signe de a	

Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de a	

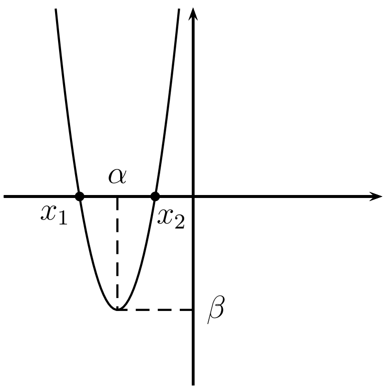
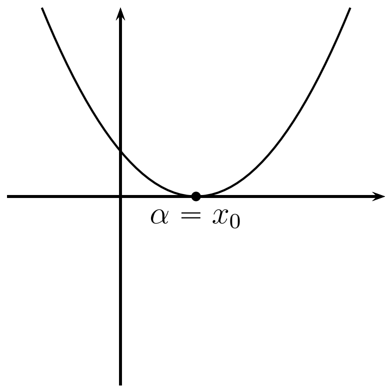
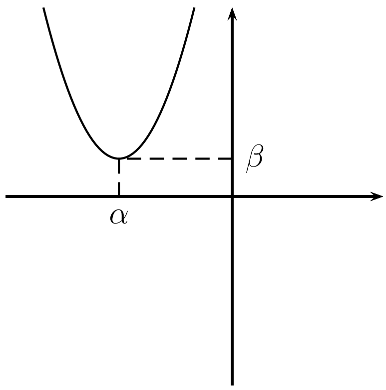
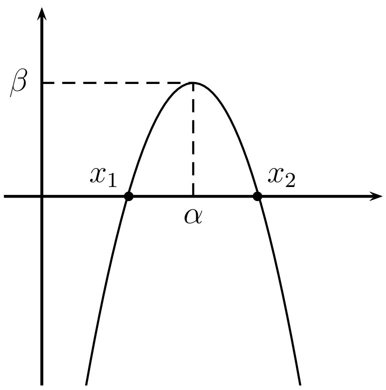
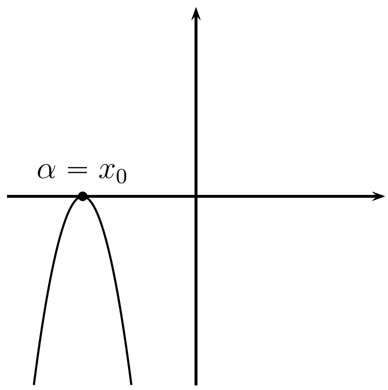
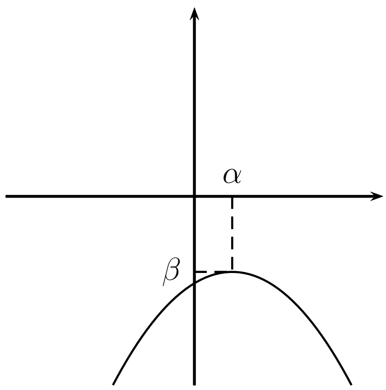
Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

1.7 Récapitulation graphique

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad (a \neq 0) \qquad \Delta = b^2 - 4ac$

Les graphiques du tableau ci-dessous illustrent graphiquement
- les variations de la fonction f (propriété 1.10) ;
- le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ selon la valeur du discriminant Δ : c'est le nombre de points d'intersection de chaque courbe avec l'axe des abscisses(propriété 1.11) ;
- le signe de $ax^2 + bx + c$ selon les valeurs de x : il est indiqué par la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses (propriété 1.13).

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		$\beta = 0$	
$a > 0$			
$a < 0$			

1.8 Les capacités attendues du chapitre

1.8.a Signe d'une fonction du 2nd degré

Capacité attendue : étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.

Exemple 1.18

Étudier le signe de la fonction polynôme définie par : $f(x) = 3(x - 1)(x + 4)$

1re méthode

On dresse un tableau de signes avec une rangée pour le signe de $x - 1$, une rangée pour le signe de $x + 4$.

Sachant que 3 est positif, le signe $f(x)$ est celui de $(x - 1)(x + 4)$.

Dans chaque colonne du tableau ci-dessous, on applique la règle des signes de la multiplications.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$			$-$	0	$+$	
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$			$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2ᵉ méthode

On applique la propriété 1.13.

Puisque $f(x) = 3(x-1)(x+4)$, on sait que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions qui sont $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$, dont le discriminant Δ est strictement positif.

D'autre part, puisque $f(x) = 3(x-1)(x+4)$, on sait que : $a = 3$, donc le signe de a est $+$ et le signe de $-a$ est $-$.

On obtient ainsi le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1.8.b Fonctions du 2nd degré s'annulant en deux réels

Capacité attendue : déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.

Voir la propriété 1.7 et l'exemple 1.8 page 18.

1.8.c Factoriser une fonction du 2nd degré

Capacité attendue : Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies :

- racine évidente ;
- détection des racines par leur somme et leur produit ;
- identité remarquable ;
- application des formules générales.

Voir plus haut les exemples 1.10 (racine évidente), 1.11(somme et produit des racines), 1.12(identité remarquable).

Autre exemple ci-dessous.

Exemple 1.19 (Factoriser en appliquant les formules générales.)

Factoriser $5x^2 + 15x - 440$.

$5x^2 + 15x - 440 = ax^2 + bx + c \qquad a = 5 \qquad b = 15 \qquad c = -440$

$\Delta = b^2 - 4ac = 15^2 - 4 \times 5 \times (-440) = 9\,025$

$\Delta > 0 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{9\,025} = 95$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15-95}{2\times 5} = -11$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15+95}{2\times 5} = 8$$

On sait que : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Donc : $5x^2 + 15x - 440 = 5(x-8)\big(x - (-11)\big) = \boxed{5(x-8)(x+11)}$

1.8.d Choisir une forme adaptée pour un problème

Capacité attendue : Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

Exemple 1.20

Énoncé

La fonction f est définie par : $f(x) = (x-5)^2 - 9$.

1. **Formes développée et factorisée**
   a) Développer et réduire $f(x)$.
   b) Factoriser $f(x)$.
2. **Choisir une forme adaptée**
   Choisir la forme la mieux adaptée pour répondre à chacune des questions suivantes.
   a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b) Calculer $f(0)$.
   c) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Corrigé

$f(x) = (x-5)^2 - 9$

1. **Formes développée et factorisée**
   a) Développer et réduire $f(x)$.
   $$f(x) = (x-5)^2 - 9 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 - 9 = \boxed{x^2 - 10x + 16}$$
   b) Factoriser $f(x)$.
   $$f(x) = (x-5)^2 - 9 = (x-5)^2 - 3^2 = (x-5-3) \times (x-5+3) = \boxed{(x-8)(x-2)}$$
2. **Choisir une forme adaptée**
   Choisir la forme la mieux adaptée pour répondre à chacune des questions suivantes.
   a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   D'après la propriété 1.10 le tableau de variation est déterminé à l'aide de la **forme canonique** $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $(a \neq 0)$ avec $a = 1$ $\alpha = 5$ et $\beta = -9$
   Puisque $a > 0$, la fonction f a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-9	$\nearrow$	

b) Calculer $f(0)$.

$f(0)$ est de toute façon simple à calculer, mais la forme la plus simple pour ce calcul est la **forme développée réduite** $f(x) = x^2 - 10x + 16$:
$f(0) = 0^2 - 10 \times 0 + 16 = \boxed{16}$.

c) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

On cherche les valeurs de x telles que $f(x)$ est négaif ou nul, autrement dit nous avons besoin du **signe de $\boldsymbol{f(x)}$** selon les valeurs de x.
Nous allons par conséquent utiliser la forme factorisée $f(x) = (x-8)(x-2)$, en procédant comme dans l'exemple 1.18.
On obtient le tableau de signe ci-dessous.

x	$-\infty$		2		8		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble des valeurs de x telles que $f(x) \leqslant 0$ est $\boxed{\text{l'intervalle } [2\ ;\ 8]}$.