# Chapitre 9

# Inégalités et inéquations

## I Exercices

### 9.1 Inéquations du premier degré

*Avant de faire les exercices ci-dessous, lire les règles sur les inégalités dans le cours, de la propriété 9.1 page 104 jusqu'à l'exemple 9.3 page 105.*

*On pourra aussi lire les exemples 9.4 et 9.5 page 105.*

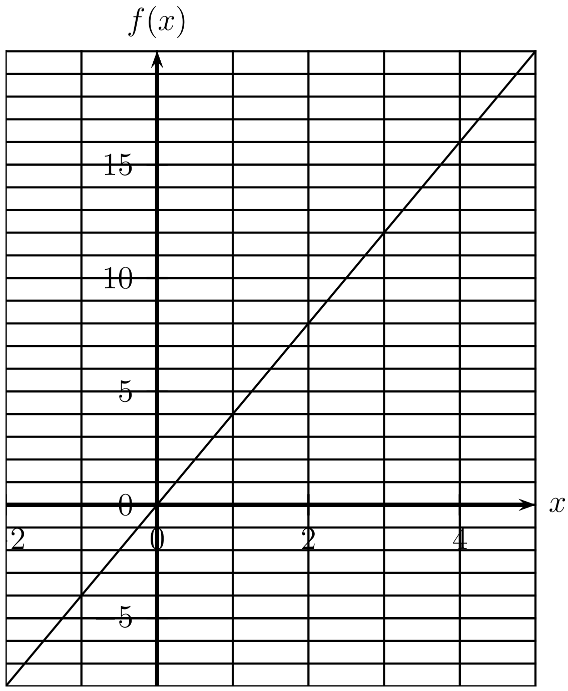
**Exercice 9.1**

**1.** Quels sont les nombres $x$ tels que $4x \geqslant 6$ ?

Indications :
- il faut isoler $x$ comme dans une équation, en faisant attention aux règles sur les inégalités ;
- la réponse à donner est un intervalle.

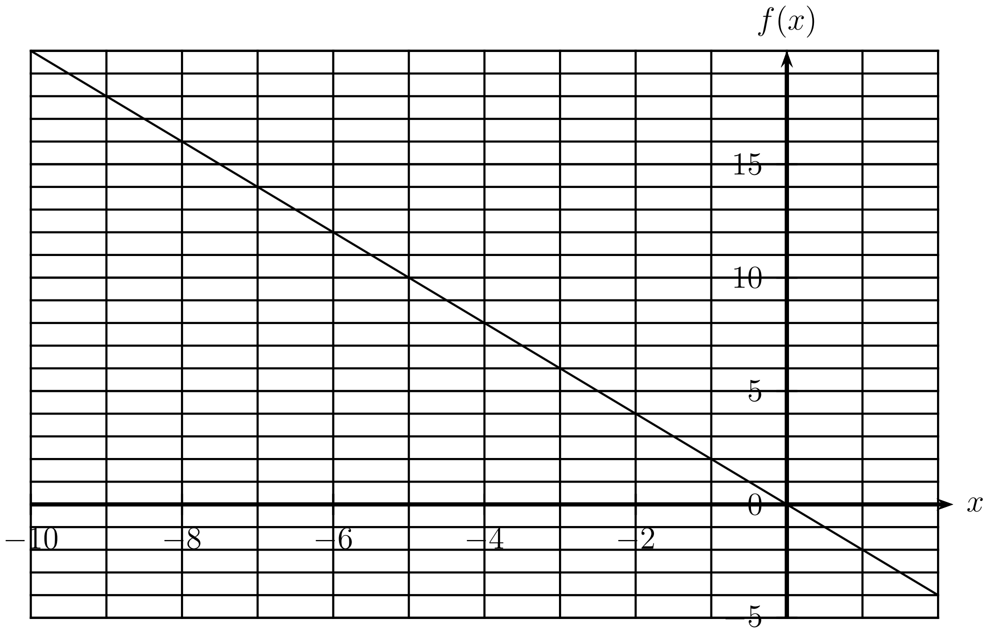
**2.** La fonction $f$ est définie par $f(x) = 4x$, et elle est représentée ci-contre.

Vérifier graphiquement la réponse à la question **1.** Compléter le graphique.



### Exercice 9.2

1. Résoudre l'inéquation $-2x \geqslant 8$.
2. La fonction $f$ est définie par $f(x) = -2x$, et elle est représentée ci-dessous.
   Vérifier graphiquement la réponse à la question **1.** Compléter le graphique.




### Exercice 9.3

Résoudre les inéquations ci-dessous.

**1.** $3x < 7,5$ **2.** $-5x > 34$ **3.** $-4x \leqslant 50$

### Exercice 9.4

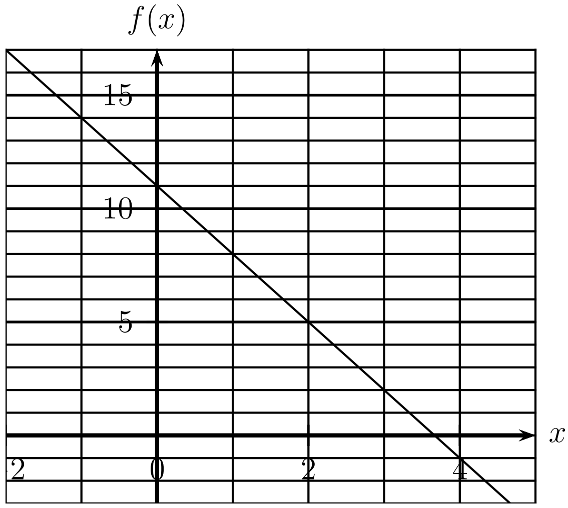
Le périmètre d'un rectangle est inférieur à 24 cm et sa longueur vaut le double de sa largeur. Quelle largeur peut-il avoir ?

Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

*Pour faire l'exercice ci-dessous, on pourra aussi lire l'exemple 9.6 page 106.*

### Exercice 9.5

1. Résoudre l'inéquation : $-3x + 11 > 5$
2. La fonction $f$ est définie par $f(x) = -3x + 11$, et elle est représentée ci-contre.
   Vérifier graphiquement la réponse à la question **1.** Compléter le graphique.



**Exercice 9.6**

Résoudre les inéquations ci-dessous.

**1.** $8x - 30 \geqslant 16$ **2.** $6x + 17 < 32$ **3.** $-7x - 2 > -7,6$

**Exercice 9.7**

On propose à un commercial deux modes de rémunérations différents.

- un salaire mensuel variable : une base fixe de 1 500 € augmentée de 4 % du montant des ventes en euros pendant le mois.
- un salaire mensuel fixe de 2 000 €

Quel est le mode de rémunération le plus avantageux ? Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

**Exercice 9.8**

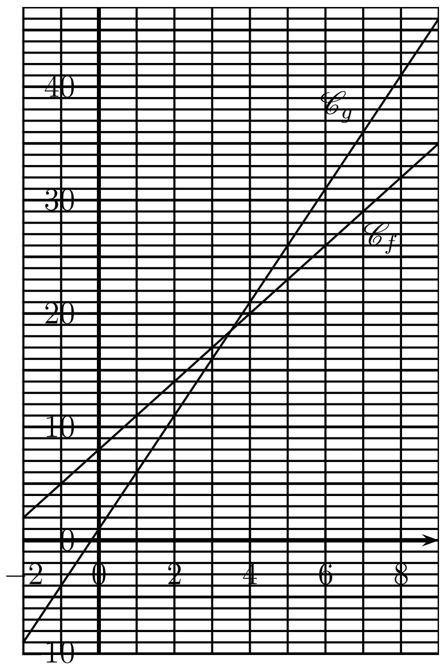
Un camion pèse une tonne à vide. On le remplit de sacs de sable de 50 kg.

Combien de sacs peut-on mettre au maximum si on veut passer sur un pont supportant au maximum 9 tonnes ?

Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

**Exercice 9.9**

1. Résoudre l'inéquation $3x + 8 < 5x + 1$.
2. Les fonctions $f$ et $g$ sont définies par $f(x) = 3x + 8$ et $g(x) = 5x + 1$ et elles sont représentées ci-contre. Vérifier graphiquement la réponse à la question **1.** Compléter le graphique.




**Exercice 9.10**

Résoudre les inéquations ci-dessous.

**1.** $7x + 4 < 10x + 25$ **2.** $11x - 2 \geqslant 3x - 9$ **3.** $-3x - 8 > x + 1$

**Exercice 9.11**

Un photographe propose deux formules pour tirer sur papier des photos numériques.

Avec la formule $f$, on paie 0,15 € par tirage.

Avec la formule $g$, on paie d'abord un forfait de 12 € et chaque tirage ne vaut que 0,09 €.

À partir de combien de tirages a-t-on intérêt à choisir la formule avec forfait ?

Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

**Exercice 9.12**

Sur l'autoroute, une voiture se trouve juste derrière un camion au moment où le conducteur de la voiture s'arrête pour faire une pause.

Il se repose 10 min puis repart et roule à 110 km/h.

Le camion a une vitesse constante de 90 km/h.

Au bout de combien de temps et de km la voiture rattrapera-t-elle le camion ?

Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

## 9.2 Signe de ax +b

*Avant de traiter l'exercice ci-dessous, on pourra étudier l'exemple du cours n° 9.8 page 108.*

**Exercice 9.13**

Quel est le signe de $3x + 18$ selon les valeurs de $x$ ?

Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

**Exercice 9.14**

Quel est le signe de $-5x + 13$ selon les valeurs de $x$ ?

Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

**Exercice 9.15**

Dresser le tableau de signe de chaque expression ci-dessous selon les valeurs de $x$.

On commencera chaque fois par résoudre une inéquation.

**1.** $-2x - 9$ **2.** $6x - 10,5$ **3.** $-3x + 11$

**Exercice 9.16**

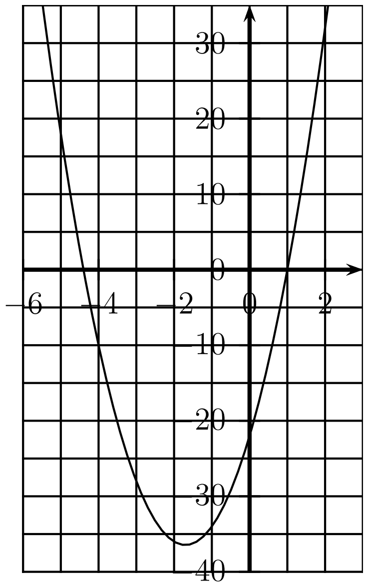
Dresser le tableau de signe de $-7x + 19,6$ selon les valeurs de $x$.

Commencer par résoudre une inéquation.

## 9.3 Inéquation produit

### Exercice 9.17

La fonction $f$ est définie par : $f(x) = (x-1)(5x+22)$ et elle est représenté graphiquement ci-contre.




**1.** Par lecture graphique, compléter le tableau 9.1 ci-dessous. On peut aussi utiliser la calculatrice.

**2.** Étude du signe de $f(x)$ par des calculs.

**a)** Étudier le signe de $x-1$ selon les valeurs de $x$.

**b)** Étudier le signe de $5x+22$ selon les valeurs de $x$.

**c)** Compléter le tableau 9.2 ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $(x-1)(5x+22)$ | |

**Tab. 9.1**

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $x-1$ | |
| Signe de $5x+22$ | |
| Signe de $(x-1)(5x+22)$ | |

**Tab. 9.2**

### Exercice 9.18

La fonction $f$ est définie par : $f(x) = (x+6)(-2x+5)$.

**1.** Étudier le signe de $x+6$ selon les valeurs de $x$.

**2.** Étudier le signe de $-2x+5$ selon les valeurs de $x$.

**3.** Compléter les 3 premières lignes du tableau ci-dessous.

**4.** Indiquer le signe de $(x+6)(-2x+5)$ en complétant la dernière ligne du tableau ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $x+6$ | |
| Signe de $-2x+5$ | |
| Signe de $(x-6)(-2x+5)$ | |

**Exercice 9.19**

Dresser le tableau de signes de chacune des fonctions $f$ définie ci-dessous.

**1.** $f(x) = (x-5)(2x-7)$ **2.** $f(x) = (-3x-16,5)(4x+9)$ **3.** $f(x) = (1-x)(3x-5)$

**Exercice 9.20**

**1.** Étudier le signe de $(x-6)(2x+9)$ selon les valeurs de $x$, en dressant un tableau de signes.

**2.** D'après ce tableau, indiquer l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(x-6)(2x+9) < 0$

**Exercice 9.21**

**1.** Étudier le signe de $(5-2x)(3x+12)$ selon les valeurs de $x$, en dressant un tableau de signes.

**2.** D'après ce tableau, indiquer l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(5-2x)(3x+12) \geqslant 0$

**Exercice 9.22**

**1.** Étudier le signe de $(x+4)(9-2x)$ selon les valeurs de $x$, en dressant un tableau de signes.

**2.** D'après ce tableau, indiquer l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(x+4)(9-2x) < 0$

**Exercice 9.23**

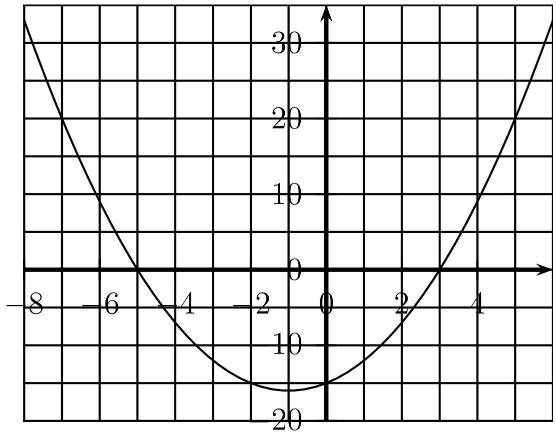
La fonction $f$ est définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 15$ et elle est représentée ci-contre.

**1.** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

**2.** Développer l'expression $(x-3)(x+5)$.

**3.** Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

**4.** Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ d'après ce tableau de signes.




**Exercice 9.24**

La fonction $f$ est définie par $f(x) = \dfrac{2x-11}{1-x}$ sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

**1.** Justifier pourquoi la fonction $f$ n'est pas définie pour $x = 1$.

**2.** Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$, en dressant un tableau de signes.

# II Cours

## 9.0 Programme

**Contenus**

Produit d'une inégalité par un réel positif, négatif, en liaison avec le sens de variation d'une fonction affine.

**Capacités attendues**

- Comparer deux quantités en utilisant leur différence, ou leur quotient dans le cas positif.
- Modéliser un problème par une inéquation.
- Résoudre une inéquation du premier degré.
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient, à l'aide d'un tableau de signes.
- Résoudre une inéquation du type $f(x) < k$, en choisissant une méthode adaptée : graphique, algébrique, logicielle.
- Résoudre, graphiquement ou à l'aide d'un outil numérique, une inéquation du type $f(x) < g(x)$

**Démonstrations**

Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geqslant 0$.

## 9.1 Règles sur les inégalités

**Propriété 9.1 (Ajouter ou soustraire un nombre aux deux membres d'une inégalité)**

> On ne change pas le sens d'une inégalité si on ajoute ou si on soustrait le même nombre aux deux membres de cette inégalité.
> Autrement dit, pour des nombres réels $a$, $b$, $c$,
> si $a < b$ alors $a + c < b + c$ et si $a < b$ alors $a - c < b - c$.

**Exemple 9.1**

Ci-dessous on part de l'inégalité $5 < 9$, on ajoute 7 à 5 et à 9, et on voit bien que l'inégalité ne change pas de sens.

$5 < 9$ $\quad 5 + 7 = 12$ $\quad 9 + 7 = 16$ $\quad$ donc $5 + 7 < 9 + 7$

Ci-dessous on part de l'inégalité $5 < 9$, on soustrait 3 à 5 et à 9, et on voit bien que l'inégalité ne change pas de sens.

$5 < 9$ $\quad 534 = 2$ $\quad 9 - 3 = 6$ $\quad$ donc $5 - 3 < 9 - 3$

**Propriété 9.2 (Multiplier ou diviser par le même nombre positif)**

> On ne change pas le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise par le même nombre positif les deux membres de cette inégalité.
> Autrement dit, pour des nombres réels $a$, $b$, $c$,
> - si $a < b$ et si $c$ est positif, alors $a \times c < b \times c$.
> - si $a < b$ et si $c$ est strictement positif, alors $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$.

**Exemple 9.2**

Ci-dessous on part de l'inégalité $6 < 18$, on multiplie 6 et 18 par 100 qui est positif, et on voit bien que l'inégalité ne change pas de sens.

$6 < 18$ $\quad 6 \times 100 = 600$ $\quad 18 \times 100 = 1800$ $\quad$ donc $6 \times 100 < 18 \times 100$

Ci-dessous on part de l'inégalité $6 < 18$, on divise 6 et 18 par 3 qui est positif, et on voit bien que l'inégalité ne change pas de sens

$6 < 18 \qquad \dfrac{6}{3} = 2 \qquad \dfrac{18}{3} = 6 \qquad \text{donc } \dfrac{6}{3} < \dfrac{18}{3}$

**Propriété 9.3 (Multiplier ou diviser par le même nombre négatif)**

On change le sens d'une inégalité si on multiplie ou si on divise par le même nombre négatif les deux membres de cette inégalité.
Autrement dit, pour des nombres réels $a$, $b$, $c$,
- si $a < b$ et si $c$ est négatif, alors $a \times c > b \times c$.
- si $a < b$ et si $c$ est strictement négatif, alors $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$.

**Exemple 9.3**

Ci-dessous on part de l'inégalité $6 < 18$, on multiplie 6 et 18 par $-10$ qui est négatif, et on voit bien que l'inégalité change de sens.

$6 < 18 \qquad 6 \times (-10) = -60 \qquad 18 \times (-10) = -180 \qquad \text{donc } 6 \times (-10) > 18 \times (-10)$

Ci-dessous on part de l'inégalité $6 < 18$, on divise 6 et 18 par $-2$ qui est négatif, et on voit bien que l'inégalité change de sens.

$6 < 18 \qquad \dfrac{6}{-2} = -3 \qquad \dfrac{18}{-2} = -9 \qquad \text{donc } \dfrac{6}{-2} > \dfrac{18}{-2}$

**Propriété 9.4 (Comparer deux nombres en utilisant leur différence)**

Pour deux nombres réels $a$ et $b$, $\quad a \leqslant b \iff a - b \leqslant 0 \quad$ et $\quad a \geqslant b \iff a - b \geqslant 0$.

**Propriété 9.5 (Comparer deux nombres positifs en utilisant leur quotient)**

Pour deux nombres réels $a \geqslant 0$ et $b > 0$, $\quad a \leqslant b \iff \dfrac{a}{b} \leqslant 1 \quad$ et $\quad a \geqslant b \iff \dfrac{a}{b} \geqslant 1$.

## 9.2 Inéquation du premier degré

**Exemple 9.4**

Résolution de l'inéquation : $2x \leqslant 5$

Pour isoler $x$, on divise par 2 les deux membres de cette inégalité.

Le nombre 2 est strictement positif, donc cela ne change pas le sens de l'inégalité.

$2x \leqslant 5 \iff \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \leqslant \dfrac{5}{2} \iff x \leqslant 2,5 \qquad \boxed{\text{L'ensemble des solutions est } ]-\infty\ ;\ 2,5].}$

**Exemple 9.5**

Résolution de l'inéquation : $-4x \leqslant 13$

Pour isoler $x$, on divise par $-4$ les deux membres de cette inégalité.

Le nombre $-4$ est strictement négatif, donc cela change le sens de l'inégalité.

$-4x \leqslant 13 \iff \dfrac{\cancel{-4}x}{\cancel{-4}} \geqslant \dfrac{13}{-4} \iff x \geqslant -3,25 \qquad \boxed{\text{L'ensemble des solutions est } [-3,25\ ;\ +\infty[.}$

**Exemple 9.6**

Résolution de l'inéquation : $-5x+6>27$

$$\begin{array}{lll} & -5x+6 & >27 \\ \iff & -5x+6-6 & >27-6 \quad \text{pas de changement de sens, on soustrait 6 de chaque côté} \\ \iff & -5x & >21 \\ \iff & \dfrac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} & <\dfrac{21}{-5} \quad \text{changement de sens, on divise par } -5 \text{ de chaque côté} \\ \iff & x & <-4,2 \end{array}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } ]-\infty\ ;\ -4,2[.}$

**Exemple 9.7**

Résolution de l'inéquation : $7x+9<4x-2$

$$\begin{array}{lll} & 7x+9 & <4x-2 \\ \iff & 7x+9-4x & <\cancel{4x}-2\cancel{-4x} \\ \iff & 3x+9 & <-2 \\ \iff & 3x\cancel{+9}\cancel{-9} & <-2-9 \\ \iff & 3x & <-11 \\ \iff & \dfrac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} & <\dfrac{-11}{3} \quad \text{pas de changement de sens, on divise par 3 qui est positif} \\ \iff & x & <\dfrac{-11}{3} \end{array}$$

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \left]-\infty\ ;\ -\dfrac{11}{3}\right[.}$

## 9.3 Exemple de résolution d'un problème

**Énoncé**

On propose à un employé le choix entre deux contrats.

- contrat A : un salaire mensuel fixe de 2 200 €
- contrat B : un salaire mensuel fixe de 1 800 € et 5 % du montant des ventes en euros pendant le mois.

Quel est le contrat plus avantageux ? Justifier, expliquer et détailler tous ses calculs.

**Quelques essais**

Calculs du salaire B pour un montant de ventes

- de 1 000 € : $1\,800 + 0,05 \times 1\,000 = 1\,850 < 2\,200$ le contrat B est moins avantageux
- de 5 000 € : $1\,800 + 0,05 \times 5\,000 = 2\,050 < 2\,200$ le contrat B est moins avantageux
- de 10 000 € : $1\,800 + 0,05 \times 10\,000 = 2\,300 > 2\,200$ le contrat B est plus avantageux

**Mise en inéquation du problème**

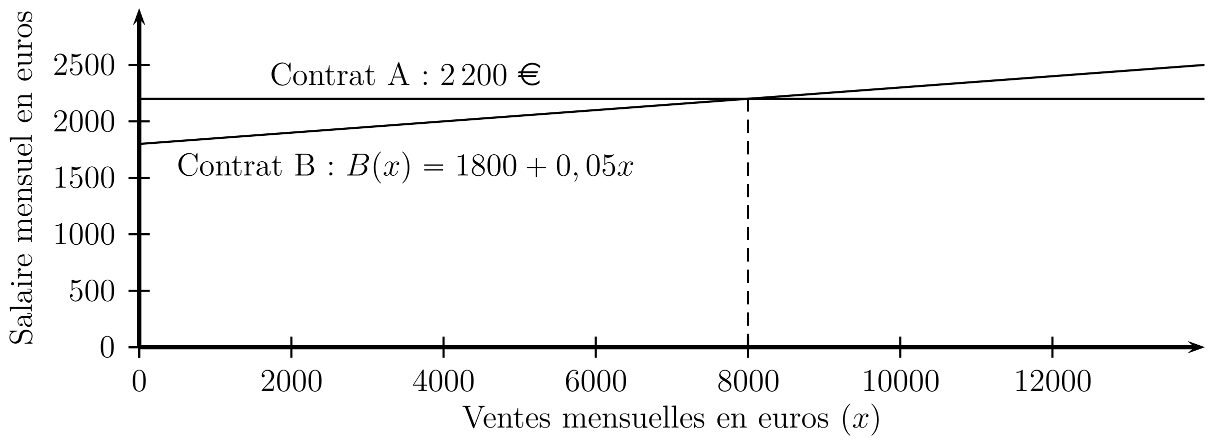
- **Choix de l'inconnue**
  On appelle $x$ le montant des ventes du mois en euros.
- **Écrire une inéquation**
  Le salaire mensuel du contrat B en fonction de $x$ est $1\,800 + 0,05x$
  Dire que le contrat B est plus avantageux que le contrat A signifie que : $1\,800 + 0,05x > 2\,200$
- **Résoudre cette inéquation.**

$$\begin{aligned} 1\,800 + 0,05x > 2\,200 &\iff 0,05x > 2\,200 - 1\,800 \\ &\iff 0,05x > 400 \\ &\iff x > \frac{400}{0,05} \qquad \text{division par 0,05 pas de changement de sens} \\ &\iff x > 8\,000 \end{aligned}$$

- **Vérifier par des calculs.**
  Le salaire mensuel avec le contrat B est :
  - pour 8 000 € de ventes : $1\,800 + 0,05 \times 8\,000 = 2\,200$ même salaire qu'avec le contrat A ;
  - pour 9 000 € de ventes : $1\,800 + 0,05 \times 9\,000 = 2\,250 > 2\,200$ le contrat B est plus avantageux.
- **Conclusion :**

  - Pour un montant de ventes inférieur à 8 000 €, le contrat A est le plus avantageux.
  - Pour un montant de ventes égal à 8 000 €, les contrats A et B sont aussi avantageux l'un que l'autre.
  - Pour un montant de ventes supérieur à 8 000 €, le contrat B est le plus avantageux.

**Utilisation d'un graphique**



## 9.4 Signe de ax + b

**Exemple 9.8**

Quel est le signe de $4x + 12$ selon les valeurs de $x$ ?

**Tableau de valeurs**

| $x$ | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x + 12$ | $-16$ | $-8$ | $0$ | $8$ | $16$ | $24$ | $32$ |

On constate que

- si $x < -3$, alors $4x + 12$ est négatif ;
- si $x = -3$, alors $4x + 12 = 0$ ;
- si $x > -3$, alors $4x + 12$ est positif.

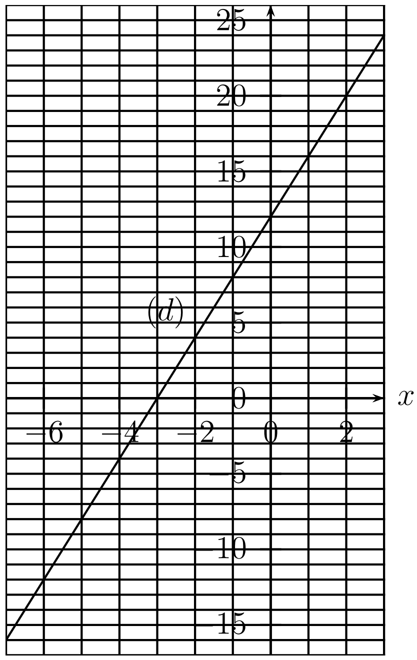
**Observation graphique**

Traçons la représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = 4x + 12$.

On sait que c'est une droite $(d)$ parce que la fonction $f$ est une fonction affine.

On observe que

- si $x < -3$, la droite $(d)$ est en dessous de l'axe des abscisses ;
- si $x = -3$, la droite $(d)$ coupe l'axe des abscisses ;
- si $x > -3$, la droite $(d)$ est au dessus de l'axe des abscisses.




**Méthode pour étudier le signe de $4x + 12$**

On résout l'inéquation $4x + 12 \geqslant 0$

$$\begin{aligned} 4x + 12 \geqslant 0 &\iff 4x + 12 - 12 \geqslant 0 - 12 \\ &\iff 4x \geqslant -12 \\ &\iff \frac{4x}{4} \geqslant \frac{-12}{4} \\ &\iff x \geqslant -3 \end{aligned}$$

Donc $4x + 12$ est positif lorsque $x \geqslant -3$, par conséquent, $4x + 12$ est négatif lorsque $x \leqslant -3$.

Pour indiquer le signe de $4x+12$ selon les valeurs de $x$, on dresse un tableau de signes, voir ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $4x + 12$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Exemple 9.9**

Étude du signe de $-2x+9$ selon les valeurs de $x$.

On résout l'inéquation $-2x+9 \geqslant 0$

$-2x+9 \geqslant 0 \iff -2x \geqslant -9 \iff x \leqslant \dfrac{-9}{-2} \iff x \leqslant 4,5$

Attention, à la 3e étape, l'inégalité change de sens parce qu'on divise par $-2$ qui est négatif.

Donc $-2x+9$ est positif lorsque $x \geqslant 4,5$, par conséquent, $-2x+9$ est négatif lorsque $x \leqslant 4,5$.

Tableau de signes.

| $x$ | $-\infty$ | | $4,5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $-2x+9$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

## 9.5 Résoudre une inéquation produit

**Exemple 9.10**

1. Dresser le tableau de signes de $(x-4)(2x+3)$ en fonction des valeurs de $x$.
2. Résoudre l'inéquation $(x-4)(2x+3) \leqslant 0$.
3. Résoudre l'inéquation $(x-4)(2x+3) > 0$.

**Résolution**

1. **Tableau de signes de** $(x-4)(2x+3)$
   - Signe de $x-4$ en fonction de $x$ : $x-4 \geqslant 0 \iff x \geqslant 4$
   - Signe de $2x+3$ en fonction de $x$ : $2x+3 \geqslant 0 \iff 2x \geqslant -3 \iff x \geqslant -\dfrac{3}{2}$
   - On complète le tableau ci-dessous. Pour la 4e ligne on applique la règle des signes de la multiplication.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x-4$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $(x-4)(2x+3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2. **Inéquation** $(x-4)(2x+3) \leqslant 0$**.**

   D'après le tableau $(x-4)(2x+3)$ est négatif lorsque $x$ appartient à l'intervalle $\boxed{\left[-\dfrac{3}{2}\ ;\ 4\right]}$.

3. **Inéquation** $(x-4)(2x+3) > 0$**.**

   D'après le tableau $(x-4)(2x+3)$ est strictement positif lorsque $x$ appartient à $\boxed{\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{3}{2}\right[ \cup\ ]4\ ;\ +\infty[}$.