Chapitre 7

Dérivée et variations d'une fonction

I Exercices

7.1 Variations des fonctions de référence

Exercice 7.1

Compléter les tableaux de variations ci-dessous. Sur les lignes en pointillés, indiquer chaque maximum et chaque minimum s'il y en a.

x	
$f(x) = -3x + 7$	

x	
$f(x) = -5(x-8)^2 + 6$	

....

x	
$f(x) = x^2$	

x	
$f(x) = x^3$	

....

x	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	

x	
$f(x) = \sqrt{x}$	

....

x	$-\pi$	π
$f(x) = \cos(x)$		

x	$-\pi$	π
$f(x) = \sin(x)$		

....

7.2 Sens de variation et signe de la dérivée

Exercice 7.2

La fonction f et définie sur $[-1,5\ ;\ 4,9]$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9$

Partie A

1. À l'aide de la calculatrice, dresser le tableau de variation de f sur $[-1,5\ ;\ 4,9]$.
2. Préciser les extremums (un extremum est un minimum ou maximum). Arrondir au centième si nécessaire.

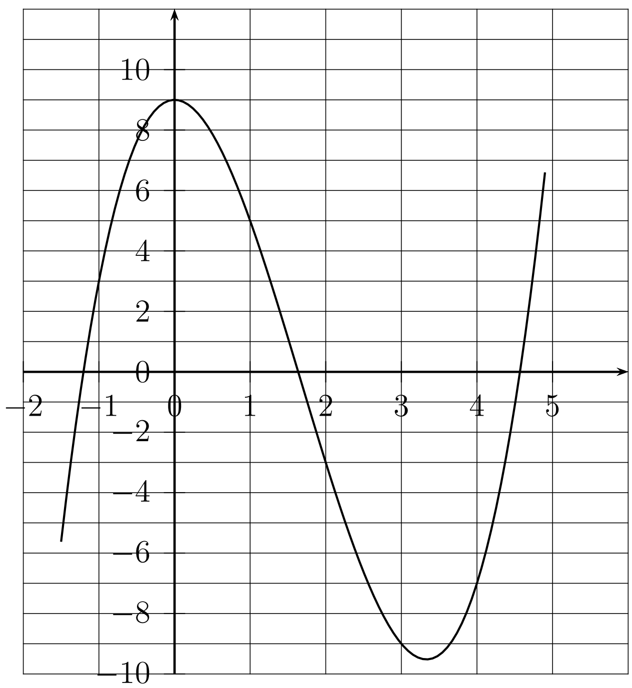
Nous allons maintenant étudier les variations de cette fonction de manière exacte à l'aide de la dérivée.

Lire le cours page 114 avant de commencer la partie B.

Partie B

1. Calculer f' la dérivée de f.
2. Factoriser $f'(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et compléter les deux premières lignes du tableau ci-dessous. Dans la première ligne, on écrira les valeurs exactes.
4. Utiliser la propriété 7.1 pour compléter la troisième ligne du tableau ci-dessous.
5. Calculer le minimum exact et indiquer en quelle valeur exacte de x il est atteint.
6. Calculer le maximum exact et indiquer en quelle valeur exacte de x il est atteint.

x	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	



Exercice 7.3

La fonction f et définie sur $[-6\ ;\ 5]$ par $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 15x + 5$.

1. Calculer la dérivée f'.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Détailler les calculs et dresser le tableau de signes.

3. Compléter le tableau précédent par le tableau des variations de f. Indiquer les images de -6 et de 5 et les valeurs des extremums arrondies au centième.

4. Faire tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'écran de la calculatrice pour vérifier.

5. Le tableau de variations précédent indique un maximum local.

a) Calculer sa valeur exacte.

b) En quelle valeur de x est-il atteint ?

6. Mêmes consignes **a)** et **b)** pour le minimum local, sans détailler les calculs.

Exercice 7.4

La fonction f est définie sur $[-3,8\ ;\ 2,7]$ par $f(x) = 7x^3 + 12x^2 - 45x - 20$.

1. Calculer la dérivée f'.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x. Détailler les calculs et dresser le tableau de signes.

3. Compléter le tableau précédent par le tableau des variations de f. Indiquer les images de $-3,8$ et de 2,7 et les valeurs des extremums arrondies au centième.

4. Faire tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'écran de la calculatrice pour vérifier.

5. Le tableau de variations précédent indique un maximum local.

a) Calculer sa valeur exacte.

b) En quelle valeur de x est-il atteint ?

6. Mêmes consignes **a)** et **b)** pour le minimum local, sans détailler les calculs.

Exercice 7.5 (Variations d'une fonction polynôme du second degré)

La fonction f et définie sur $[-1\ ;\ 6]$ par $f(x) = x^2 - 6x + 13$.

1. Calculer la dérivée f'.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

3. Dresser un tableau comportant le signe de la dérivée, les variations de f, avec les images de -1 et de 6 et la valeur de l'extremum.

Exercice 7.6

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ 5]$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x+1}$. La fonction f est dérivable de dérivée f'.

1. Calculer la dérivée.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

3. Dresser un tableau contenant le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x, les variations de la fonction f et toutes les valeurs remarquables.

4. Tracer la représentation graphique de f à la calculatrice pour vérifier.

Exercice 7.7

La fonction f est définie sur $[-0,8\ ;\ 5]$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

La fonction f est dérivable de dérivée f'.

1. Calculer la dérivée.
2. Étudier le signe de la dérivée.
3. Dresser un tableau contenant
   - le signe de $f'(x)$ en fonction de x ;
   - les variations de la fonction f en indiquant les valeurs remarquables.
4. Tracer la représentation graphique de f à la calculatrice pour vérifier.
5. Sans justifier, quel est le minimum de f sur $[-0,8\ ;\ 5]$ et en quelle valeur de x est-il atteint ?
6. **a)** Calculer la valeur exacte du maximum de f sur $[-0,8\ ;\ 5]$.

   b) En quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 7.8

La fonction f est définie sur $[-1\ ;\ 2,9]$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-6x+1}{x-3}$.

La fonction f est dérivable de dérivée f'.

1. Calculer la dérivée.
2. Étudier le signe de la dérivée. Détailler les calculs et donner les valeurs exactes.
3. Dresser un tableau de variation complet (signe de la dérivée, variations de la fonction, valeurs remarquables au centième près).
4. Tracer la représentation graphique de f à la calculatrice, en réglant les valeurs de la fenêtre d'après le tableau de variations.
5. **a)** Donner la valeur du maximum de f sur $[-1\ ;\ 2,9]$ arrondie au centième.

   b) En quelle valeur de x est-il atteint ? Donner la valeur exacte.

Exercice 7.9

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ 1,5]$ par $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ 1,5]$ de dérivée f'.

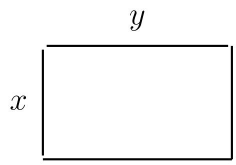
1. Calculer $f'(x)$ sous la forme $\dfrac{ax+b}{2\sqrt{x}}$ (rappel : pour tout réel x positif, $\sqrt{x}^2 = x$).
2. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser un tableau de variation complet (signe de la dérivée, variations de la fonction, valeurs remarquables au centième près).
4. Tracer la représentation graphique de f à la calculatrice, en réglant les valeurs de la fenêtre d'après le tableau de variations et de telle façon que l'on voie les deux axes du repère.
5. **a)** Donner la valeur exacte du minimum de f sur $[0\ ;\ 1,5]$.

   b) En quelle valeur de x est-il atteint ? Donner la valeur exacte.

7.3 Problèmes d'optimisation

Exercice 7.10

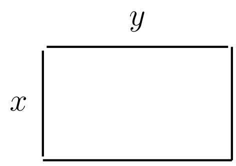
Un rectangle a pour largeur x et pour longueur y et son aire est égale à 30.
Problème : comment choisir x et y pour que le périmètre du rectangle soit minimal ?



1. Calculer le périmètre de ce rectangle lorsque : **a)** $x = 3$ **b)** $x = 5$
2. Écrire la longueur y en fonction de x.
3. Écrire le périmètre p du rectangle en fonction de x.
4. On appelle $p(x)$ l'expression précédente. Déterminer la valeur minimale de $p(x)$.

Exercice 7.11

Un rectangle a pour largeur x et pour longueur y et son périmètre est égale à 20.
Problème : comment choisir x et y pour que l'aire du rectangle soit maximale ?



1. Calculer l'aire de ce rectangle lorsque : **a)** $x = 2$ **b)** $x = 4$
2. Écrire la longueur y en fonction de x.
3. Écrire l'aire $\mathscr{A}$ du rectangle en fonction de x.
4. On appelle $\mathscr{A}(x)$ l'expression précédente. Déterminer la valeur maximale de $\mathscr{A}(x)$.

Exercice 7.12

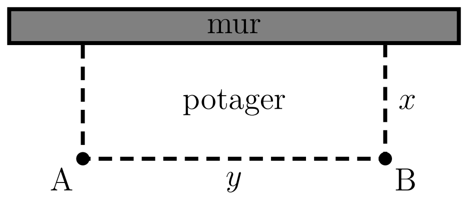
Partie A

La fonction f est définie par : $f(x) = 2x + \dfrac{392}{x}$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. $f$est dérivable de dérivée f'.

1. Calculer la dérivée.
2. Montrer que la dérivée peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 392}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
4. En déduire le tableau de variation complet de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$ (signe de $f'(x)$, variations de f, et valeurs remarquables).

Partie B

Un agriculteur décide de réaliser un grand potager de forme rectangulaire dans son jardin le long de son mur, comme cela est représenté ci-contre. Ce potager devra avoir une aire de 392 m^2.
Cet agriculteur veut savoir comment placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale.



On appelle x la distance séparant chaque piquet du mur et y la distance entre les 2 piquets A et B (x et y sont donc positifs).

1. Sachant que l'aire du potager est 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur du grillage en fonction de x est : $2x + \dfrac{392}{x}$
3. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.

7.4 Problèmes divers

Exercice 7.13

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-7\ ;\ 3]$ par : $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-7\ ;\ 3]$ de dérivée f'.

1. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser un tableau comportant
   - le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x ;
   - les variations de f ;
   - toutes les valeurs remarquables.
4. Justifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-7\ ;\ 3]$, on a l'encadrement : $-0,5 \leqslant f(x) \leqslant 4,5$.

Exercice 7.14

La fonction f et la fonction g sont définies sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)^3$ et $g(x) = 3x+1$.

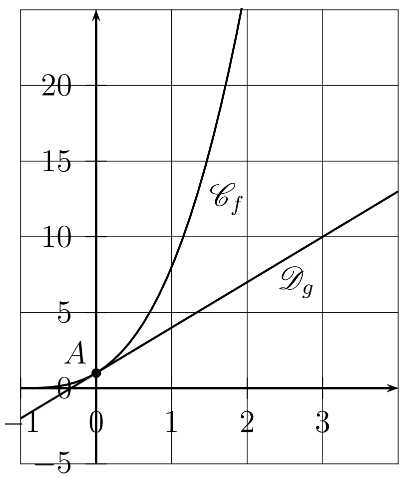
Les fonctions f et g sont dérivable s sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ de dérivées respectives f' et g'.

Les fonctions f et g sont représentées ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}_g$.

Le point A est le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0.

On admet que la droite $\mathscr{D}_g$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.

On va justifier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}_g$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$.



Pour cela, on va étudier la fonction définie par :
$h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)^3 - (3x+1) = (x+1)^3 - 3x - 1$.

1. Pour tout réel x, calculer $h'(x)$.
2. Étudier le signe de $h'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser un tableau comportant
   - le signe de $h'(x)$ selon les valeurs de x ;
   - les variations de h ;
   - toutes les valeurs remarquables.
4. D'après ce tableau de variations, justifier le signe de $h(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$.
5. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}_g$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$.

II Cours

7.0 Programme

Contenus

- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes.
- Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

Capacités attendues

- Étudier les variations d'une fonction. Déterminer les extremums.
- Résoudre un problème d'optimisation.
- Exploiter les variations d'une fonction pour établir une inégalité. Étudier la position relative de deux courbes représentatives.
- Étudier, en lien avec la dérivation, une fonction polynôme du second degré : variations, extremum, allure selon le signe du coefficient de x^2.

Exemple d'algorithme

- Méthode de Newton, en se limitant à des cas favorables.

7.1 Sens de variation et signe de la dérivée, extremum

Propriété 7.1 (Sens de variation et signe de la dérivée)

- Une fonction f dérivable sur un intervalle est croissante sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée f' est positive sur cet intervalle.
- Une fonction f dérivable sur un intervalle est décroissante sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée f' est négative sur cet intervalle.
- Une fonction f dérivable sur un intervalle est constante sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur cet intervalle.

Définition 7.1 (Extremum local)

- $f(a)$ est un maximum local de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le maximum de f sur I.
- $f(a)$ est un minimum local de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(a)$ soit le minimum de f sur I.
- $f(a)$ est un extremum local de f signifie que $f(a)$ est un maximum ou un minimum local de f.

Propriété 7.2 (Dérivée et extremum local)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre de cet intervalle.

- Si $f(a)$ est un extremum local de f, alors $f'(a) = 0$.
- Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de f.

Propriété 7.3 (Tangente et extremum local)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et a est un nombre de cet intervalle.
Si $f(a)$ est un extremum local de f,
alors la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est horizontale.