

Chapitre 11

Évolution

I Exercices

11.1 Appliquer un taux d'évolution – Coefficient multiplicateur

Exercice 11.1

Une personne a un salaire mensuel de 1200 € et obtient une augmentation de 2 %.

1. Calculer l'augmentation de salaire.
2. Calculer le salaire mensuel après augmentation.

Exercice 11.2

15 kg de feuilles ont été étalées pour dessécher. Le poids va diminuer de 90 %.

1. Calculer la diminution de poids.
2. Calculer le poids de feuilles après diminution.

Lire le cours, de l'exemple 11.1 page 131, jusqu'à l'exemple 11.2 page 132.

Exercice 11.3

La surface habitée d'une commune était de 13 km² et en plusieurs années elle a augmenté de 20 %. Calculer cette surface après augmentation en utilisant le coefficient multiplicateur.

Exercice 11.4

L'effectif des élèves d'un lycée était de 1 500 élèves et a baissé de 5 %.

Calculer l'effectif après la baisse en utilisant le coefficient multiplicateur.

Exercice 11.5

1. Un prix est multiplié par 1,05.
 - a) Calculer le taux d'évolution.
 - b) Est-ce une augmentation ou une diminution ?
2. Mêmes questions a) et b) pour :
 - un volume d'eau multiplié par 0,98 ;
 - un salaire multiplié par 1,04 ;
 - la taille d'un arbre multipliée par 1,009 ;
 - des ventes multipliées par 0,87.

11.2 Évolution – Variation absolue et relative

Exercice 11.6

Dans une évolution, une quantité augmente ou diminue, on part donc d'une valeur initiale (V_I) et on arrive à une valeur finale (V_F).

La variation absolue est l'augmentation ou la diminution : $V_F - V_I$.

La variation relative est la proportion de la variation absolue par rapport à la valeur initiale : $\frac{V_F - V_I}{V_I}$.

1. Compléter le tableau ci-dessous en utilisant les données et les résultats des exercices 11.3 et 11.4.
2. Que remarque-t-on pour la variation relative ?

		Ex 11.3	Ex 11.4
Valeur initiale	V_I		
Valeur finale	V_F		
Variation absolue	$V_F - V_I$		
Variation relative	$\frac{V_F - V_I}{V_I}$		

Exercice 11.7

La taille d'un bambou est passée de 1,80 m à 2,20 m. Calculer la variation relative en pourcentage arrondi à l'unité.

Exercice 11.8

Une action en bourse était à 78 € et vaut maintenant 65 €. Calculer la variation relative en pourcentage arrondi à l'unité.

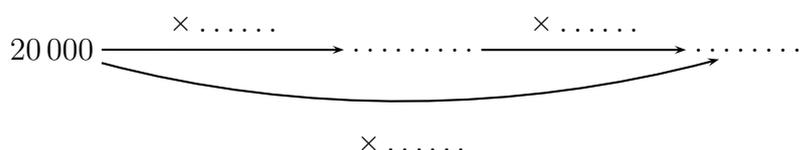
11.3 Évolutions successives

Exercice 11.9

L'effectif des ventes d'un article est de 20 000 unités, puis augmente une première fois de 30 % puis augmente une deuxième fois de 50 %.

Le schéma plus bas, représente les deux évolutions successives. On le complétera au fur et à mesure des calculs.

1. Calculer l'effectif après la première augmentation, puis l'effectif final après la deuxième augmentation.
2. Calculer le coefficient multiplicateur global (de l'effectif initial 20 000 à l'effectif final).
3. Calculer le taux d'évolution global (de l'effectif initial 20 000 à l'effectif final).



Lire le cours de la propriété 11.3 page 133 à l'exemple 11.10 page 135.

Exercice 11.10

La fréquentation d'un site s'élève à 157 000 connexions puis subit une baisse de 25 %, suivie d'une nouvelle baisse de 35 %.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global.
2. Calculer le nombre de connexions au site après les deux baisses successives.
3. Calculer le taux d'évolution global.

Exercice 11.11

Le prix d'un carburant augmente de 30 %, puis diminue de 31 %.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global.
2. Calculer le taux d'évolution global.
3. Globalement, s'agit-il d'une augmentation ou d'une diminution ?

Exercice 11.12

Le prix d'un article subit une baisse de 30 %, puis subit une hausse de 35 %.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global.
2. Calculer le taux d'évolution global.
3. Globalement, s'agit-il d'une baisse ou d'une hausse ?

11.4 Évolution réciproque

Exercice 11.13

La masse de déchets en France est passée de 220 kg par habitant et par an en 1975, à 352 kg par habitant et par an en 2002.

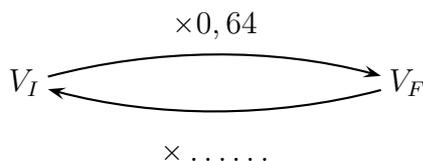
1. Calculer le pourcentage de hausse de la masse de déchets.
2. Par rapport à la masse de déchets en 2002, calculer le pourcentage de baisse qu'il faudrait appliquer pour revenir à la situation de 1975.

Exercice 11.14

Un prix diminue, et il est multiplié par 0,64.

Le schéma plus bas, représente cette diminution et le retour au prix de départ.

1. Par quel nombre faut-il multiplier le prix final pour revenir au prix de départ ? Le calculer puis compléter le schéma.
2. Quand le prix est multiplié par 0,64, calculer le taux d'évolution.
3. Quand on revient au prix de départ, calculer le taux d'évolution.



Exercice 11.15

Dans une entreprise le chiffre d'affaire a baissé de 22 % en un trimestre. Calculer le pourcentage de hausse qu'il faudrait au trimestre suivant pour revenir au chiffre d'affaire de départ. Arrondir ce pourcentage au dixième près.

Exercice 11.16

De 2000 à 2010 la population d'une ville a augmenté de 19 %. De 2010 à 2017, la population est revenue à l'effectif de 2000. Calculer le pourcentage de diminution de 2010 à 2017. Arrondir ce pourcentage à l'unité près.

11.5 Problème de synthèse**Exercice 11.17**

Le tableau incomplet ci-dessous concerne le montant d'une action en euros en 2016 à 2020.

Année	2016	2017	2018	2019	2020
Montant de l'action en euros	156,00	184,08			

1. Calculer le taux d'évolution de ce montant de 2016 à 2017 en pourcentage.
2.
 - De 2017 à 2018, l'action a baissé de 27 %.
 - De 2018 à 2019, l'action a augmenté de 21 %.
 - a) Calculer le taux global en pourcentage de 2017 à 2019.
 - b) Calculer le montant de l'action en 2019. Arrondir au centième près.
3. En 2020, l'action est revenue au montant de 2018. Calculer le taux d'évolution de 2019 à 2020. en pourcentage arrondi au dixième près.

II Cours

11.0 Programme

11.0.a Collège

Le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur font partie des programmes de collège.

11.0.b Classe de seconde

Contenus

- Évolution : variation absolue, variation relative.
- Évolutions successives, évolution réciproque : relation sur les coefficients multiplicateurs.

Capacités attendues

- Exploiter la relation entre deux valeurs successives et leur taux d'évolution.
- Calculer le taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs.
- Calculer un taux d'évolution réciproque.

11.1 Vocabulaire

Le mot *évolution* désigne l'évolution d'une quantité, par exemples :

- un prix qui augmente ou qui diminue
- une population qui augmente ou qui diminue
- la taille d'un arbre qui augmente
- le volume d'eau dans une citerne qui augmente ou qui diminue
- etc.

11.2 Appliquer un taux d'évolution – Coefficient multiplicateur

Exemple 11.1

Un article coûte 62 € et augmente de 7 %. Calculer son prix final c'est à dire son prix après augmentation.

Le taux d'évolution est : $\frac{7}{100} = 0,07$

L'augmentation est égale à : $62 \times 0,07 = 4,34$ €

Le prix final est égal à : $62 + 4,34 = 66,34$ €

Reprenons le calcul du prix final en une seule suite de calculs :

$$62 + 62 \times 0,07 = 62 \times 1 + 62 \times 0,07 = 62 \times (1 + 0,07) = 62 \times 1,07$$

Le nombre $1 + 0,07 = 1,07$ est appelé le coefficient multiplicateur.

$$\text{Schéma : } 62 \xrightarrow{\times(1 + 0,07)} 66,34$$

Propriété 11.1

Une quantité évolue d'une valeur initiale V_I à une valeur finale V_F avec un taux d'évolution t .

$$\text{Alors : } V_F = V_I \times (1 + t). \quad \text{Schéma : } V_I \xrightarrow{\times(1 + t)} V_F$$

Démonstration

La valeur finale est égale à la valeur initiale + l'augmentation ou la diminution.

Or, cette augmentation ou cette diminution est égale à Valeur initiale \times Taux d'évolution.

On a donc : $V_F = V_I + V_I \times t = V_I \times 1 + V_I \times t = V_I \times (1 + t)$.

Définition 11.1 (Coefficient multiplicateur)

Pour un taux d'évolution t , le coefficient multiplicateur est égal à $1 + t$.

Exemple 11.2

Le volume d'eau dans une citerne était de 15 000 L et son volume a baissé de 20 %.

Calculer le volume final.

Le taux d'évolution est négatif parce que c'est une baisse : $t = -20 \% = -\frac{20}{100} = -0,2$.

Le coefficient multiplicateur est : $1 + t = 1 + (-0,2) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Le volume final est égal à : $15\,000 \times 0,8 = \boxed{12\,000 \text{ L}}$.

Propriété 11.2 (Lien entre le taux d'évolution et le coefficient multiplicateur)

$CM = 1 + t \iff t = CM - 1$

Exemple 11.3

- Une quantité augmente et elle est multipliée par 1,07.
Son taux d'évolution est alors : $1,07 - 1 = 0,07 = 7 \%$.
- Une quantité diminue et elle est multipliée par 0,84.
Son taux d'évolution est alors : $0,84 - 1 = -0,16 = -16 \%$.

11.3 Évolution – Variation absolue et relative**11.3.a Variation absolue**

L'expression *variation absolue* désigne une augmentation ou une diminution.

Définition 11.2

Une quantité passe d'une valeur initiale à une valeur finale.

Variation absolue = valeur finale – valeur initiale = $V_F - V_I$.

Exemple 11.4 (Augmentation d'un prix)

Un article coûtait 54 €, et coûte maintenant 57 €.

L'évolution du prix est une augmentation.

La variation absolue est : $57 - 54 = 3 \text{ €}$.

Exemple 11.5 (Baisse de population)

La population d'une ville est passée de 8 300 habitants à 7 900 habitants.

L'évolution de la population est une diminution.

La variation absolue est : $7\,900 - 8\,300 = -400$ habitants.

11.3.b Variation relative

La variation relative est la proportion de la variation absolue par rapport à la valeur initiale.

$$\text{On a donc : variation relative} = \frac{\text{variation absolue}}{\text{valeur initiale}} = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

La variation absolue est l'augmentation ou la diminution, et quand on connaît la valeur initiale V_I et le taux d'évolution t on calcule la variation absolue en multipliant la valeur initiale par le taux, autrement dit : variation absolue = $V_I \times t$

$$\text{Donc : Variation relative} = \frac{\text{variation absolue}}{\text{valeur initiale}} = \frac{V_I \times t}{V_I} = t$$

Cette variation relative est donc égale au taux d'évolution. On donne donc la définition ci-dessous.

Définition 11.3 (Taux d'évolution ou variation relative)

Une quantité passe d'une valeur initiale à une valeur finale.

$$\text{Taux d'évolution} = \frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{V_F - V_I}{V_I}$$

Remarque 11.1

La valeur initiale et la valeur finale sont parfois notées V_0 et V_1 , ou bien quantité 1 et quantité 2 (Q_1 et Q_2). On dit aussi parfois valeur de départ V_D et valeur d'arrivée V_A .

La formule du taux d'évolution peut donc être écrite de différentes manières :

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \quad \text{ou} \quad t = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \quad \text{ou} \quad t = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} \quad \text{etc.}$$

Exemple 11.6

- Un premier article passe 40 à 42 € ;
- un deuxième article coûtait 120 € et il est soldé à 102 €.

1. Variations absolues

$$1^{\text{er}} \text{ article : } V_F - V_I = 42 - 40 = \boxed{2 \text{ €}} \quad 2^{\text{e}} \text{ article : } V_F - V_I = 102 - 120 = \boxed{-18 \text{ €}}$$

2. Variations relatives ou taux d'évolution

- 1^{er} article : $t_1 = \frac{42 - 40}{40} = 0,05 = \frac{5}{100} = \boxed{5 \%}$
- 2^e article : $t_2 = \frac{102 - 120}{120} = -\frac{18}{120} = -0,15 = -\frac{15}{100} = \boxed{-15 \%}$

11.4 Évolutions successives

Propriété 11.3

Si une quantité subit une 1^{re} évolution de taux t_1 , puis une 2^e évolution de taux t_2 , cette quantité est multipliée par $(1 + t_1)(1 + t_2)$.

Schéma :

$$V_0 \xrightarrow{\times(1+t_1)} V_1 \xrightarrow{\times(1+t_2)} V_2$$

$$\quad \quad \quad \times(1+t_1)(1+t_2)$$

Exemple 11.7

Un article qui coûte 70 € a beaucoup de succès, et son prix subit une hausse de 20 % puis une hausse de 40 %. Calculer le prix final.

La valeur initiale est : $V_0 = 70$.

Calcul en deux étapes

Le prix après la première hausse est : $V_1 = V_0 \times (1 + t_1) = 70 \times (1 + 0,20) = 84$

Le prix après la deuxième hausse est : $V_2 = V_1 \times (1 + t_2) = 84 \times (1 + 0,40) = 117,60$

Calcul en une seule suite de calculs.

$V_2 = V_0 \times (1 + t_1) \times (1 + t_2) = 70 \times (1 + 0,20) \times (1 + 0,40) = 70 \times 1,2 \times 1,4 = 117,60$

Le prix final est $\boxed{117,60 \text{ €}}$.

Exemple 11.8

Une action en bourse coûte 60 € subit une hausse de 30 % puis une baisse de 20 %. Calculer le prix final en une seule suite de calculs.

La valeur initiale est : $V_0 = 60$.

$V_2 = V_0 \times (1 + t_1) \times (1 + t_2) = 60 \times (1 + 0,30) \times (1 - 0,20) = 60 \times 1,3 \times 0,8 = 62,4$

Le prix final est $\boxed{62,40 \text{ €}}$.

Définition 11.4 (Taux d'évolution global, et coefficient multiplicateur global)

Une quantité subit une 1^{re} évolution de taux t_1 , puis une 2^e évolution de taux t_2 .

Schéma :

$$V_0 \xrightarrow{\times(1+t_1)} V_1 \xrightarrow{\times(1+t_2)} V_2$$

$\xrightarrow{\times(1+t_1)(1+t_2)}$

- Le **taux d'évolution global** est le taux de l'évolution de la valeur initiale V_0 à la valeur finale V_2 .
- Le **coefficient multiplicateur global** est le coefficient multiplicateur de la valeur initiale V_0 à la valeur finale V_2 , il est égal à $(1 + t_1)(1 + t_2)$.

Méthode 11.1 (Calcul du taux d'évolution global à partir des taux d'évolution successifs.)

Une quantité subit une 1^{re} évolution de taux t_1 , puis une 2^e évolution de taux t_2 .

Comment calculer le taux global ?

- On calcule le coefficient multiplicateur global : $CM_{\text{global}} = (1 + t_1)(1 + t_2)$.
- On calcule le taux global T : $T = CM_{\text{global}} - 1$.

Exemple 11.9

Reprenons l'exemple 11.7.

Un article subit une hausse de 20 % puis une hausse de 40 %.

Calculer le taux global de hausse.

$$t_1 = \frac{20}{100} = 0,2 \quad t_2 = \frac{40}{100} = 0,4$$

- On calcule le coefficient multiplicateur global :
 $CM_{\text{global}} = (1 + t_1)(1 + t_2) = (1 + 0,2)(1 + 0,4) = 1,68$.

- On calcule le taux global T : $T = CM_{\text{global}} - 1 = 1,68 - 1 = 0,68 = \frac{68}{100}$.

Le taux global est : $\boxed{t = 68 \%}$.

Exemple 11.10

Une action en bourse subit une hausse de 23 % puis une baisse de 20 %.

1. Calculer le taux global.
2. L'évolution globale est-elle une baisse ou une hausse ?

1. Calcul du taux global.

$$t_1 = \frac{23}{100} = 0,23 \quad t_2 = -\frac{20}{100} = -0,2$$

- On calcule le coefficient multiplicateur global :

$$CM_{\text{global}} = (1 + t_1)(1 + t_2) = (1 + 0,23)(1 - 0,2) = 0,984.$$

- On calcule le taux global T : $T = CM_{\text{global}} - 1 = 0,984 - 1 = -0,016 = -\frac{1,6}{100}$.

Le taux global est : $t = -1,6 \%$.

2. L'évolution globale est-elle une baisse ou une hausse ?

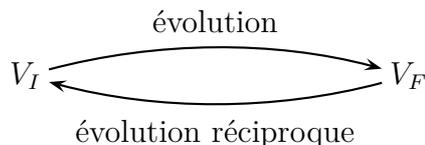
L'évolution globale est $\text{une baisse de } 1,6 \%$.

11.5 Évolution réciproque**Définition 11.5**

Une quantité évolue d'une valeur initiale V_I à une valeur finale V_F .

L'évolution réciproque de cette évolution est l'évolution de la valeur finale V_F à la valeur initiale V_I .

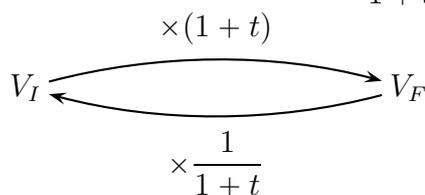
Schéma :

**Propriété 11.4**

Si une quantité subit une évolution de taux t ,

alors le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est $\frac{1}{1+t}$.

Schéma :

**Méthode 11.2 (Calcul du taux d'évolution réciproque.)**

Une quantité subit une évolution de taux t .

Comment calculer le taux d'évolution réciproque ?

- On calcule le coefficient multiplicateur réciproque : $CM_{\text{réciproque}} = \frac{1}{1+t}$.
- On calcule le taux de l'évolution réciproque : $t' = CM_{\text{réciproque}} - 1$.

Exemple 11.11

Le patron d'un cinéma était très satisfait parce que la fréquentation de son cinéma avait augmenté de 25 %.

Malheureusement la fréquentation a ensuite baissé et elle est revenue à la fréquentation initiale.

Calculer ce pourcentage de baisse.

- On calcule le coefficient multiplicateur réciproque : $CM_{\text{réciproque}} = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+0,25} = 0,8$.
- On calcule le taux de l'évolution réciproque : $t' = CM_{\text{réciproque}} - 1 = 0,8 - 1 = -0,20 = -\frac{20}{100}$.

Le pourcentage de baisse est égal à $\boxed{-20 \%}$